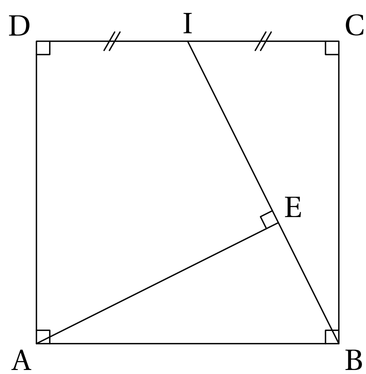
Leçon 1

La symétrie centrale

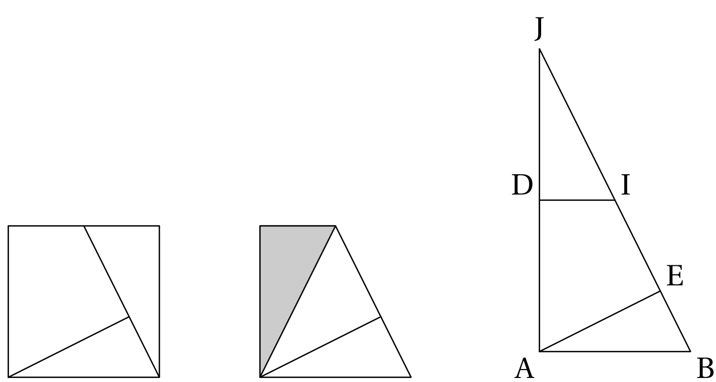
Prérequis

- Connaître la symétrie axiale (page 12).

On considère le puzzle ci-dessous : il est constitué d'un carré $ABCD$, I est le milieu du segment $[CD]$ et les droites (AE) et (BI) sont perpendiculaires.



Il *semble* qu'à partir de ces trois pièces, on puisse construire un triangle rectangle de la façon suivante :



Mais est-ce vraiment un triangle rectangle ? Est-ce que l'angle $\widehat{JAB}$ est un angle droit ? Les points J, D et A sont-ils alignés ? Les points J, I et B le sont-ils également ?

Cours

On sait que les angles $\widehat{JDI}$ et $\widehat{IDA}$ sont des angles droits. Or, on sait que $\widehat{JDA} = \widehat{JDI} + \widehat{IDA}$. Donc l'angle $\widehat{JDA}$ est un angle plat et les points J, D et A sont bien alignés.
On sait que les points D, I et C sont alignés. Donc $\widehat{DIB} + \widehat{BIC} = 180°$. Or, $\widehat{JID} = \widehat{BIC}$ car ce sont les mêmes angles du triangle BIC. Par conséquent, $\widehat{BID} + \widehat{DIJ} = \widehat{BID} + \widehat{BIC} = 180°$. Les points B, I et J sont également alignés.

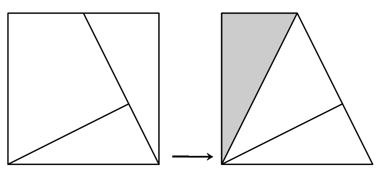
Il est alors évident que l'angle $\widehat{JAB}$ est un angle droit : le triangle JAB est bien un triangle rectangle en A.

Exercice 1

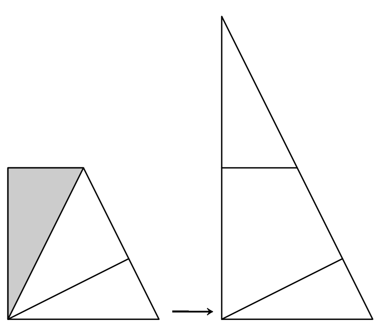
Fabriquer ce puzzle puis construire un rectangle avec les trois pièces.

Cet assemblage, permettant d'aboutir au triangle JAD rectangle en A, s'est fait en deux étapes :

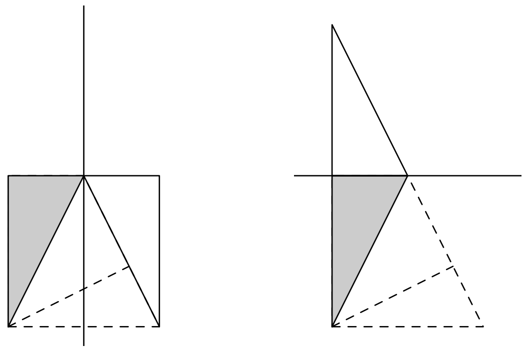
Étape 1 on retourne le triangle BCI : on a donc fait une symétrie axiale par rapport à la médiatrice du segment $[CD]$:



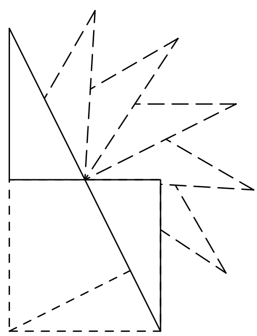
Étape 2 on retourne le *nouveau* triangle BCI autour de la droite (DI) : on a donc encore fait une symétrie axiale mais cette fois-ci par rapport à la droite (DI).



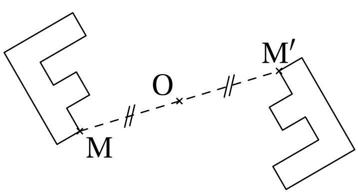
On a alors « enchaîné » deux symétries axiales d'axes perpendiculaires :



On peut également remarquer que cet assemblage pouvait être fait en une seule étape : faire faire un demi-tour au triangle BIC autour du point I.



L'image du demi-tour est à conserver lors de toutes les constructions utilisant une symétrie centrale.



Le demi-tour par rapport à un point O s'appelle *la symétrie centrale de centre O* ou *symétrie par rapport* au point O.

M' est l'image de M par la symétrie centrale de centre O ou M' est le symétrique de M par rapport au point O.

Il ne faut pas oublier qu'une symétrie centrale est un « enchaînement » de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires.

Propriété

Dire que le point M' est l'image d'un point M par la symétrie de centre O, c'est dire que O est le milieu du segment $[MM']$.

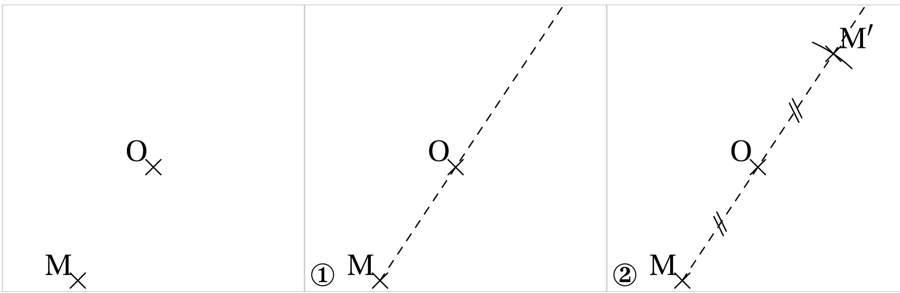
Cours

Le point O, centre de la symétrie, est son propre symétrique. C'est le seul point possédant cette caractéristique. On dit que le point O est le point *invariant* par la symétrie de centre O.

La construction du symétrique d'un point M par rapport à un point O est donc simple. Elle se fait en deux étapes :

① on trace la demi-droite $[MO)$;

② puis le cercle de centre O et de rayon OM recoupe cette demi-droite en M'.



Exercice 2

Placer trois points A, B et C non alignés.

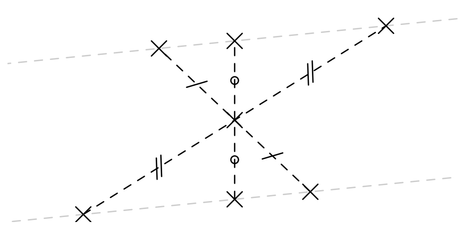
1.▶ Construire le symétrique du point A par rapport au point B. On l'appelle M.

2.▶ Construire le symétrique du point B par rapport au point C. On l'appelle N.

3.▶ Construire le symétrique du point C par rapport au point A. On l'appelle O.

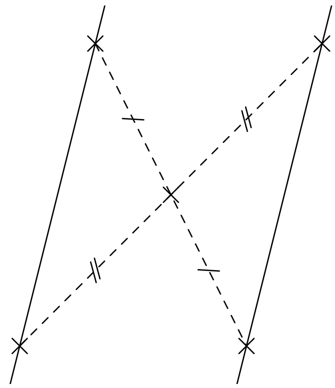
Étant donné qu'une symétrie centrale est un « enchaînement » de deux symétries axiales, cette symétrie possède les mêmes propriétés de transformation que la symétrie axiale vue en 6e (page 12) :

– lorsqu'on construit les symétriques de trois points alignés par rapport à un point, on obtient trois points alignés ;



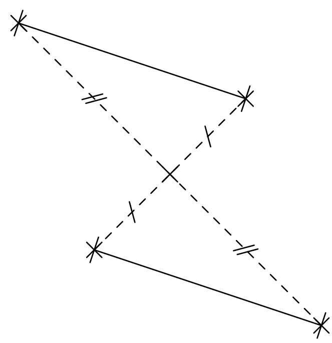
– lorsqu'on construit le symétrique d'une droite par rapport à un point, on obtient une droite ;

C'est le résultat de la propriété d'alignement précédente.

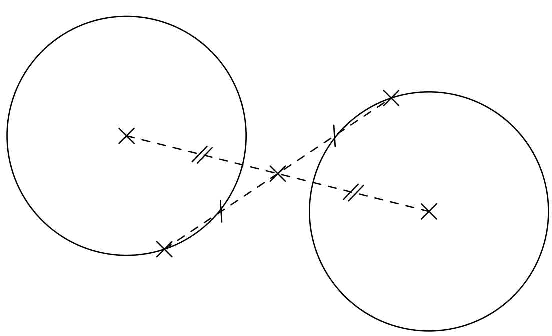


Pour construire le symétrique d'une droite par rapport à un point, seuls les symétriques de deux points de cette droite sont nécessaires.

– lorsqu'on construit le symétrique d'un segment par une symétrie centrale, on obtient un segment de même longueur ;

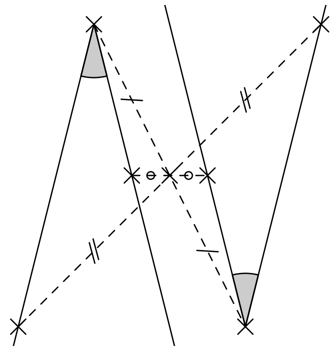


– lorsqu'on construit le symétrique d'un cercle par rapport à un point, on obtient un cercle de même rayon ;

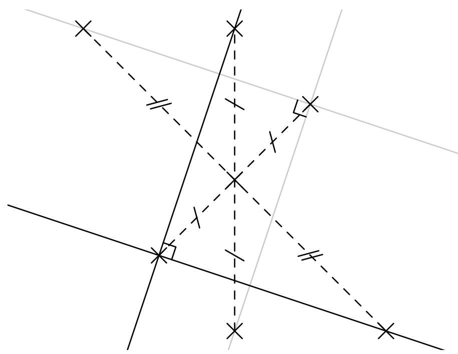


Pour construire le symétrique d'un cercle par rapport à un point, seuls les symétriques du centre et d'un point du cercle sont nécessaires.

– lorsqu'on construit le symétrique d'un angle par rapport à un point, on obtient un angle de même mesure ;



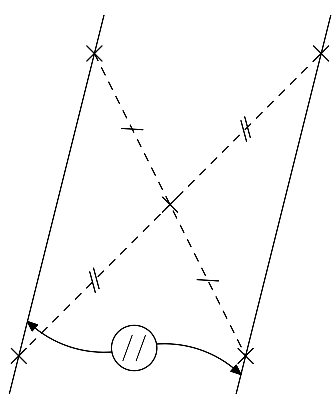
– lorsqu'on construit les symétriques de deux droites perpendiculaires par rapport à un point, on obtient deux droites perpendiculaires.



De plus, on a la propriété suivante :

Propriété

Lorsqu'on construit le symétrique d'une droite (d) par rapport à un point, on obtient une droite parallèle à la droite (d).



Exercice 3

1/ Construire un triangle EFG sachant que $EF = 4$ cm ; $FG = 6$ cm et $EG = 5$ cm.

2/ (a) Construire le point F' symétrique du point F par rapport au point E. Construire le point G' symétrique du point G par rapport au point E.

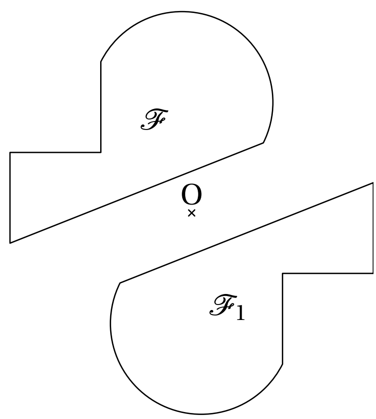
(b) Que peut-on dire des droites (FG) et $(F'G')$? Pourquoi ?

(c) Donner, sans la mesurer, la longueur EG'. Expliquer.

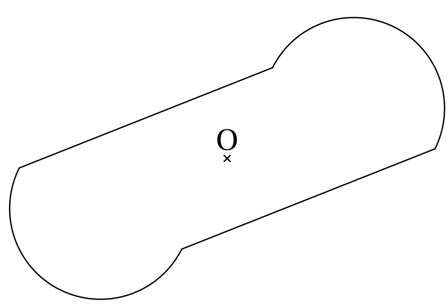
Cours

▷ Centre de symétrie

Tout comme deux points, lorsque deux figures se correspondent par une symétrie centrale, on dit que ce sont des figures symétriques.
Sur la figure suivante, les figures $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}_1$ sont symétriques par rapport au point O :

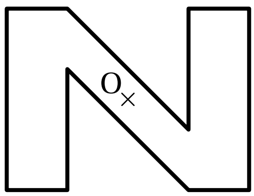


Mais parfois, une figure $\mathscr{F}$ et son symétrique par rapport à un point O sont confondus :

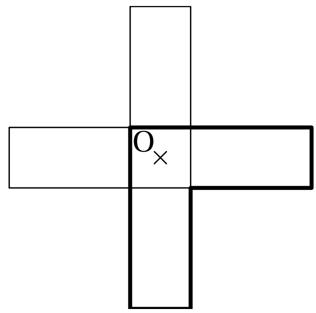


Cours

Si une figure $\mathscr{F}$ est « transformée » en elle-même par la symétrie centrale de centre O, alors on dit que le point O est *le centre de symétrie* de la figure $\mathscr{F}$.
Dans ce cas, la figure $\mathscr{F}$ est *invariante* par la symétrie de centre O.



Le point O est le centre de symétrie pour la figure $\mathscr{F}$.

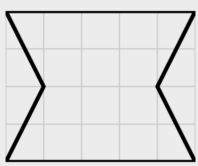


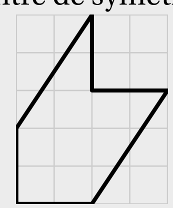
Le point O n'est pas un centre de symétrie pour la figure $\mathscr{G}$.

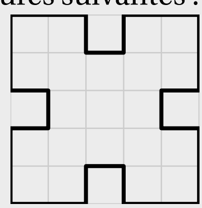
Il ne peut y avoir au maximum qu'un centre de symétrie, contrairement aux axes de symétrie qui peuvent être plus nombreux.

Exercice 4

Trouver, s'il existe, le centre de symétrie des figures suivantes :







À l'issue de cette leçon, les compétences du socle commun sont :
- construire le symétrique d'une droite par rapport à une droite ;
- par rapport à un point, construire le symétrique d'un point, d'un segment, d'une droite, d'un cercle ;
- construire ou compléter à l'aide des instruments usuels la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à un point.