Chapitre 1

Les oscillations

Les oscillations sont présentes dans la vie de tous les jours : la respiration, le pendule, la corde de guitare, les vagues, l'agitation thermique des atomes ou molécules en sont des exemples parmi d'autres. Les systèmes considérés sont en général en mouvement autour de leur position d'équilibre. Lorsque les mouvements se répètent de manière périodique au cours du temps, on parle de phénomènes vibratoires ou oscillatoires. Pour les ondes, le phénomène a en plus la propriété de se propager dans l'espace : nous développerons en détail cette notion d'onde dans le chapitre 2.

Nous abordons ainsi dans un premier temps la notion de **période** : l'oscillation d'une grandeur physique autour d'une position d'équilibre est un mouvement qui se répète dans le temps.

1.1 L'oscillation harmonique simple

L'oscillation harmonique simple d'une grandeur physique x est décrite par :

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)} \tag{1.1}$$

avec :
A, l'amplitude de l'oscillation (même unité que x),
ω_0, la pulsation (rad s^{-1}),
$\omega_0 t + \phi$, la phase,
ϕ, la constante de phase.

On peut dessiner un vecteur $\overrightarrow{OM}$ (représentation de Fresnel, voir Fig. 1.1) dont le module est égal à A, et dont l'angle par rapport à Ox est égal à $\omega_0 t + \phi$.

$x(t)$ est alors le projeté de $\overrightarrow{OM}$ sur Ox :

$$x(t) = proj_{/Ox}(\overrightarrow{OM}) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{1.2}$$

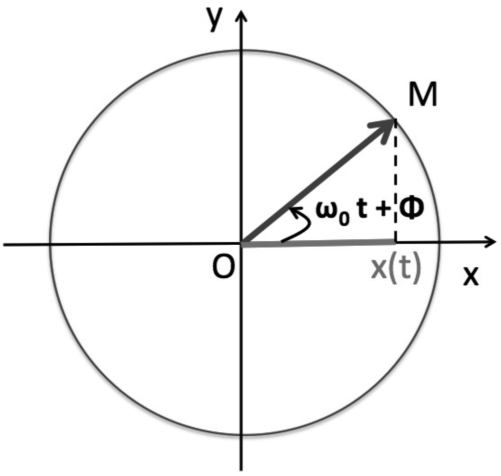

FIGURE 1.1 – Représentation de Fresnel de la grandeur oscillante.

La période T_0 correspond au temps nécessaire au système pour retrouver sa position initiale, ou pour le vecteur $\overrightarrow{OM}$ au temps nécessaire pour faire un tour complet, c'est à dire parcourir un angle 2π.

On doit alors avoir :

$$\omega_0(t + T_0) + \phi = \omega_0 t + \phi + 2\pi \tag{1.3}$$

La période est ainsi égale à :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}} \tag{1.4}$$

On en déduit la fréquence :

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} \tag{1.5}$$

et la pulsation :

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 \tag{1.6}$$

Pour un oscillateur harmonique simple, **harmonique** signifie que x est une fonction sinusoïdale de fréquence unique, et **simple** signifie que l'amplitude A est constante.

Exemple : le ressort

On considère un ressort et une masse m tels que présentés sur la Fig. 1.2. Dans un premier temps, les frottements sont négligés. La masse du ressort est également négligée. l_0 est la longueur à vide du ressort. k est la constante de raideur.

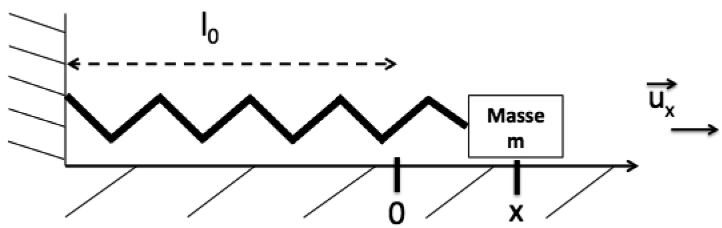

FIGURE 1.2 – Ressort horizontal. l_0 est la position du ressort à l'équilibre. x représente le déplacement de la masse par rapport à sa position à l'équilibre.

La force du ressort sur m est égale à :

$$\vec{F} = -kx\vec{u}_x \tag{1.7}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, on obtient :

$$-kx = m\ddot{x} \tag{1.8}$$

d'où, en posant $\omega_0 = \sqrt{k/m}$,

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \tag{1.9}$$

C'est l'**équation différentielle de l'oscillateur harmonique**. Il est facile de vérifier que $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ est solution de cette équation, en remarquant que $\ddot{x} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \phi)$.

Nous allons maintenant déterminer les deux constantes A et ϕ grâce aux conditions initiales. Par exemple, nous supposons que la masse m est lâchée sans vitesse initiale en $x = x_0$ à $t = 0$.

Ces deux conditions se traduisent par :

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

ou encore :

$$\begin{cases} A\cos\phi = x_0 \\ -A\omega_0 \sin\phi = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

Il faut que A et ω_0 soient différents de 0 (sinon il n'y a pas d'oscillation). On choisit alors $\phi = 0$, d'où $A = x_0$. La solution $x(t)$ s'écrit finalement :

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)} \tag{1.12}$$

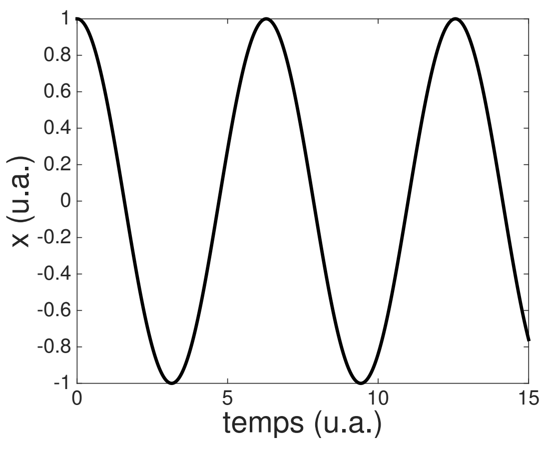

FIGURE 1.3 – Position $x(t)$ dans le cas du ressort horizontal.

La figure 1.3 présente l'évolution de x en fonction du temps. L'intervalle entre deux maximums représente la période T_0. D'après (1.4), on a donc :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{1.13}$$

Il est important de remarquer que la période est indépendante de l'amplitude. Ceci est vrai pour toutes les oscillations harmoniques simples, avec une équation différentielle du type (1.9).

Regardons maintenant l'énergie associée à ce système. On cherche l'énergie potentielle E_p sous la forme $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$. Pour notre système, cela s'écrit sous la forme :

$$-kx\vec{u}_x = -\frac{dE_p}{dx}\vec{u}_x \tag{1.14}$$

d'où, en choisissant $E_p = 0$ en $x = 0$:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \tag{1.15}$$

D'autre part, pour l'énergie cinétique E_c, on a :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m(-x_0\omega_0 \sin\omega_0 t)^2 \tag{1.16}$$

d'où, pour l'énergie totale E :

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}mx_0^2\frac{k}{m}\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}kx_0^2 = Cte \tag{1.17}$$

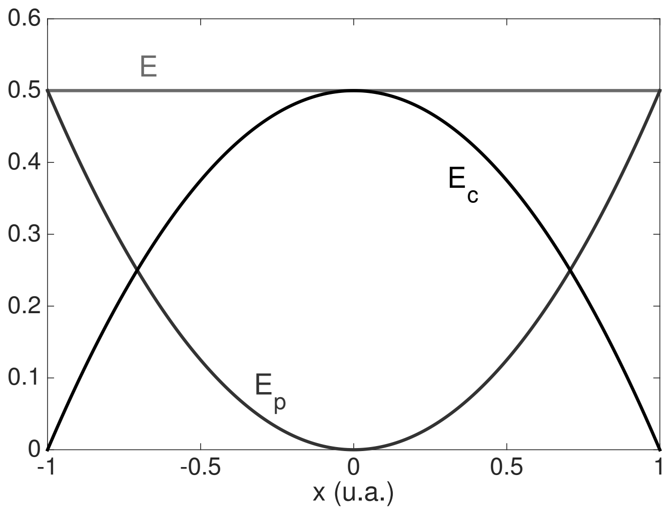

FIGURE 1.4 – Représentation des énergies totale (E), cinétique (E_c) et potentielle (E_p) en fonction de x, dans le cas du ressort où $k = 1$, $x_0 = 1$. Toutes les grandeurs sont exprimées en unités arbitraires.

Ces différentes énergies sont représentées Fig. 1.4 en fonction de x.

L'énergie totale est constante.

De façon générale, l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique simple est constante.

1.2 Oscillations amorties

Si le système étudié subit des frottements, l'énergie et l'amplitude de l'oscillateur vont diminuer avec le temps, pour finalement tendre vers 0.

En reprenant l'exemple du ressort (Fig. 1.2), supposons que la masse m subit une force de frottement de la forme $\overrightarrow{F} = -\gamma\overrightarrow{v} = -\gamma\dot{x}\overrightarrow{u}_x$, s'opposant au vecteur vitesse.

En écrivant le principe fondamental de la dynamique, puis en projetant selon Ox, on obtient une nouvelle équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1.18}$$

En posant $\Gamma = \gamma/m$ et $\omega_0^2 = k/m$, on cherche ainsi à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \tag{1.19}$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$\lambda^2 + \Gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{1.20}$$

et

$$\Delta = \Gamma^2 - 4\omega_0^2 \tag{1.21}$$

Trois cas sont possibles :

1. **Si $\Delta > 0$ (frottements forts**, $\Gamma^2 > 4\omega_0^2$), on a deux racines réelles λ_1 et λ_2, toutes deux négatives, et $x(t)$ s'écrit :

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}} \tag{1.22}$$

avec

$$\lambda_1 = \frac{-\Gamma + \sqrt{\Delta}}{2} \tag{1.23}$$

et

$$\lambda_2 = \frac{-\Gamma - \sqrt{\Delta}}{2} \tag{1.24}$$

On a un régime apériodique amorti, ou **régime sur-critique** (voir Fig. 1.5).

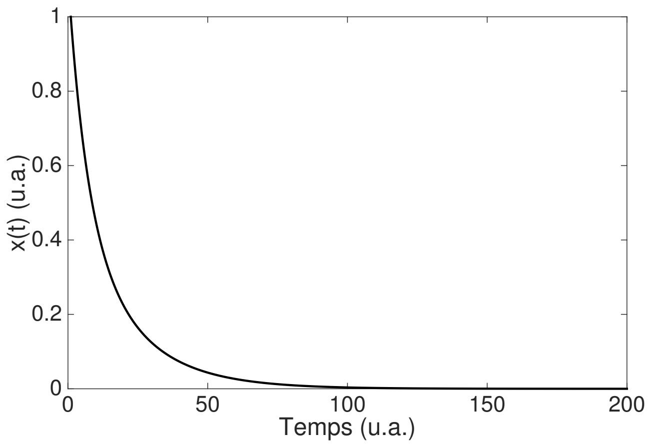

FIGURE 1.5 – Cas du régime **sur-critique** correspondant à l'équation (1.22).

2. **Si** $\Delta < 0$ (**frottements faibles**, $\Gamma^2 < 4\omega_0^2$, $\Delta = j^2(4\omega_0^2 - \Gamma^2)$), on a deux racines complexes λ_1 et λ_2,

$$\lambda_1 = \frac{-\Gamma + j\sqrt{4\omega_0^2 - \Gamma^2}}{2} \tag{1.25}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\Gamma - j\sqrt{4\omega_0^2 - \Gamma^2}}{2} \tag{1.26}$$

et $x(t)$ s'écrit :

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}[\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)] \tag{1.27}$$

avec :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/4} \tag{1.28}$$

Pour rechercher la solution en fonction des conditions initiales, si on choisit la première expression de $x(t)$ de l'équation (1.27), C_1 et C_2 seront deux constantes complexes. Et si on choisit la deuxième expression de l'équation (1.27), α et β seront deux constantes réelles.

En remarquant l'équivalence d'écriture suivante :

$$\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \phi) \tag{1.29}$$

avec A et ϕ deux constantes déterminées elles aussi par les conditions initiales, on peut alors écrire la solution $x(t)$ sous la forme :

$$\boxed{x(t) = A e^{-\frac{\Gamma}{2} t} \cos(\omega t + \phi)} \tag{1.30}$$

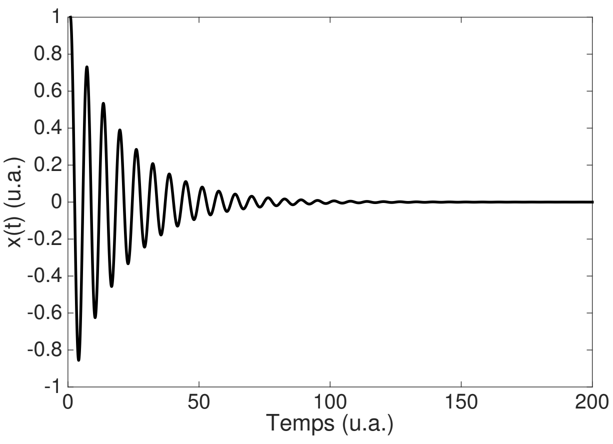

FIGURE 1.6 – Cas du régime **sous-critique** correspondant à l'équation (1.30).

On a alors un **régime sous-critique** (voir Fig. 1.6), et la période T des oscillations s'écrit :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/4}} \tag{1.31}$$

On remarque que $T > T_0$, avec $T_0 = 2\pi/\omega_0$.