Chapitre 1.
Raisonnement par récurrence

1. Comment effectuer et rédiger un raisonnement par récurrence pour démontrer des formules algébriques?

Coach : Ce type de raisonnement a été inventé par le génialissime Blaise Pascal (1623-1662), mathématicien, physicien et philosophe français.

Méthode

On donne un nom, par exemple $P(n)$, à la propriété (c'est-à-dire la formule) qu'on veut démontrer. Ensuite, pour montrer que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$, on procède en trois étapes :

Etape 1 : Initialisation. On montre que la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $P(k)$ est vraie pour $n = k$.

Etape 2 : Hérédité. On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie et on montre que la propriété $P(n+1)$ l'est encore.

Etape 3 : Conclusion. On rédige alors : « comme $P(k)$ est vraie et qu'il y a hérédité, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$ ».

Exemple (force 1)

Ex. 1. *Démontrer par récurrence la propriété : pour* $n \geq 1$, $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Coach : N'oublie pas de donner d'abord un nom (par exemple $P(n)$) à la propriété que tu veux démontrer.

Soit $P(n)$ la propriété $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Etape 1 : Initialisation. $P(1)$ est vraie car pour $n = 1$, on a : $1 = \dfrac{1 \times (1+1)}{2}$.

Etape 2 : Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie (c'est-à-dire que $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$)

et montrons que $P(n+1)$ l'est encore (c'est-à-dire qu'on a :

$1+2+3+...+n+\mathbf{n}+\mathbf{1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$).

On a : $1+2+3+...+n+\mathbf{n}+\mathbf{1}=\underbrace{1+2+3+...+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}+\mathbf{n}+\mathbf{1}$ (car $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$),

et donc : $1+2+3+...+n+\mathbf{n}+\mathbf{1}=\frac{n(n+1)}{2}+\mathbf{n}+\mathbf{1}$ soit :

$$1+2+3+...+n+\mathbf{n}+\mathbf{1}=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{\mathbf{2(n+1)}}{2}=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

(ce qu'on voulait). On a donc bien hérédité.

Etape 3 : Conclusion. Comme $P(1)$ est vraie et qu'on a hérédité, $P(n)$ vraie pour tout $n\geq 1$ et donc : « Pour $n\geq 1$, $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ».

Coach : 1) il est important d'écrire ce qu'on veut prouver, c'est-à-dire d'écrire en toutes lettres la propriété $P(n+1)$ à démontrer.

2) Si on veut prouver que la propriété est vraie pour $n\geq 0$, on commence l'initialisation à $P(0)$. Pour $n\geq 2$, on commence à $n\geq 2$, etc.

3) Bien sûr, dans un raisonnement par récurrence, on ne va pas te demander de démontrer qu'une propriété est fausse (surtout en Terminale).

EXERCICE-TEST

Coach : Allez, un petit exo pour t'entraîner afin que le raisonnement par récurrence devienne pour toi comme un automatisme !

Exercice-Test (force 1)

ET1. *Montrer par récurrence que pour* $n\geq 1$, $1+3+5+...+2n-1=n^2$.

2. Comment effectuer et rédiger un raisonnement par récurrence pour démontrer des propriétés sur des suites ?

Coach : Le raisonnement par récurrence a de très belles applications, comme de démontrer certaines propriétés des suites (leur expression, leurs variations, etc.)

Méthode

On donne un nom, par exemple $P(n)$, à la propriété (sur les suites) qu'on veut démontrer. Ensuite, pour montrer que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$, on procède en trois étapes :

Etape 1 : Initialisation. On montre que la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $P(k)$ est vraie pour $n = k$.

Etape 2 : Hérédité. On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie et on montre que la propriété $P(n+1)$ l'est encore.

Etape 3 : Conclusion. On rédige alors : « comme $P(k)$ est vraie et qu'il y a hérédité, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$ ».

Exemple (force 1)

Ex. 1. *Soit (U_n) la suite définie par $U_{n+1} = U_n + 61$ et $U_0 = -267$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $U_n = -267 + 61n$.*

Coach : Fais comme d'habitude, donner un nom à la propriété à démontrer.

Soit $P(n)$ la propriété $U_n = -267 + 61n$.

Etape 1 : Initialisation. $P(0)$ est vraie car pour $n = 0$, on a : $U_0 = -267 + 61 \times 0$ (car $-267 + 61 \times 0 = -267 + 0 = -267$).

Etape 2 : Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire que $U_n = -267 + 61n$ et montrons que $P(n+1)$ l'est encore, c'est-à-dire qu'on a : $U_{n+1} = -267 + 61(n+1)$.

On a : $U_{n+1} = \underbrace{U_n}_{-267+61n} + 61 = -267 + 61n + 61 = -267 + 61(n+1)$ (ce qu'on voulait).

On a donc bien hérédité.

Etape 3 : Conclusion. Comme $P(0)$ est vraie et qu'on a hérédité, $P(n)$ vraie pour tout $n \geq 0$ et donc : « pour tout $n \geq 0$, $U_n = -267 + 61n$ ».

Ex. 2. *Soit (U_n) la suite définie par $U_{n+1} = \frac{n+1}{n} U_n$ et $U_1 = 1$.*

a) Démontrer par récurrence que $U_n > 0$ *pour tout* $n \geq 1$.

b) En déduire que la suite (U_n) *est strictement croissante.*

a) Soit $P(n)$ la propriété $U_n > 0$.

Etape 1 : Initialisation. $P(1)$ est vraie car $U_1 > 0$ $(U_1 = 1)$.

Etape 2 : Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire que $U_n > 0$ et montrons que $P(n+1)$ l'est encore, c'est-à-dire qu'on a : $U_{n+1} > 0$.

On a : $U_{n+1} = \frac{n+1}{n} U_n$, et donc : $U_{n+1} > 0$ car : $\begin{cases} \frac{n+1}{n} > 0 \\ U_n > 0 \end{cases}$. On a donc bien hérédité.

Etape 3 : Conclusion. Comme $P(1)$ est vraie et qu'on a hérédité, $P(n)$ vraie pour tout $n \geq 1$, et donc $U_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.

b)

> **Coach** : Rappelle-toi que $\begin{cases} (U_n) \text{ croissante } \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n > 0 \\ (U_n) \text{ décroissante } \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n < 0 \end{cases}$.

On a : $U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{n} U_n - U_n = \left(\frac{n+1}{n} - 1 \right) U_n = \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n} \right) U_n = \frac{1}{n} U_n$,

donc : $U_{n+1} - U_n > 0$ puisque $U_n > 0$ et $\frac{1}{n} > 0$, donc (U_n) est strictement croissante.

EXERCICES-TESTS

> **Coach** : Au programme, des raisonnements par récurrence qui te permettront de démontrer une formule algébrique et les variations d'une suite.

Exercice-Test (force 1)

ET1. *Soit* (V_n) *la suite définie par* $V_{n+1} = V_n \times 1,45$ *et* $V_0 = 316$. *Démontrer par récurrence que pour tout* $n \geq 0$, $V_n = 316 \times 1,45^n$.

ET2. *Soit* (U_n) *la suite définie par* $U_{n+1} = \frac{n}{n+1} U_n$ *et* $U_0 = 3$.

a) Démontrer par récurrence que $U_n > 0$ *pour tout* $n \geq 0$.

b) En déduire que la suite (U_n) *est strictement décroissante.*

Chapitre 2.
Limites de suites

1. Comment déterminer la limite d'une suite de référence ?

Coach : En termes de notation, comme la limite d'une suite s'étudiera toujours lorsque $n \to +\infty$ tu peux écrire indifféremment $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $\lim u_n$.

Méthode

On retient bien le tableau suivant :

u_n	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
$u_n = n$	$+\infty$
$u_n = n^2$	$+\infty$
$u_n = n^k$ (k entier positif)	$+\infty$
$u_n = an + b$	$\begin{cases} +\infty \text{ si } a > 0 \\ -\infty \text{ si } a < 0 \end{cases}$
$u_n = \dfrac{1}{n}$	0
$u_n = \dfrac{1}{n^2}$	0
$u_n = \dfrac{1}{n^k}$ (k entier positif)	0
$u_n = \sqrt{n}$	$+\infty$
$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$	0
$u_n = q^n$	$\begin{cases} \text{n'existe pas si } q < -1 \\ 0 \text{ si } -1 < q < 1 \\ 1 \text{ si } q = 1 \\ +\infty \text{ si } q > 1 \end{cases}$

Exemples (force 1)

Ex. 1. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4 = +\infty$.

Ex. 2. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n - 3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n + 19 = -\infty$.

Ex. 3. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^5}=0$.

Ex. 4. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$.

Ex. 5. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,5)^n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-0,5)^n=0$.

> **Coach** : Tous ces résultats ont été trouvés grâce au tableau. Comme ce sont des suites de référence, tu n'as rien à justifier !

EXERCICE-TEST

> **Coach** : Allez, un peu d'entraînement pour t'aider à bien retenir et à bien utiliser le tableau précédent.

Exercice-Test (force 1)

ET1. *Déterminer a)* $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2$ *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty}n^4$ *c)* $\lim\limits_{n\to+\infty}n^7$ *d)* $\lim\limits_{n\to+\infty}n^8$ *e)* $\lim\limits_{n\to+\infty}5n-6$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}-15n-1$ *g)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}n+1$ *h)* $\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{3}{4}n-5$ *i)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^6}$ *j)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^7}$

k) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ *l)* $\lim\limits_{n\to+\infty}3^n$ *m)* $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,9)^n$ *n)* $\lim\limits_{n\to+\infty}(-0,8)^n$ *o)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$

p) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^n$ *q)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ *r)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{150}{149}\right)^n$ *s)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{149}{150}\right)^n$ *t)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{149}{150}\right)^n$.

2. Comment déterminer la limite d'une suite ?

Méthode

> On utilise les règles suivantes : $\frac{1}{+\infty}=0^+$, $\frac{1}{-\infty}=0^-$, $\frac{1}{0^+}=+\infty$, $\frac{1}{0^-}=-\infty$.

> **Coach** : Attention, tu n'as pas le droit d'écrire $\frac{1}{+\infty}=0^+$ dans une copie, tu dois rédiger en utilisant des accolades. Mais rassure-toi, le principe est rigoureusement identique !

Exemples (force 1)

Ex. 1. *On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+8}=0$ *car :* $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}1=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}2n+8=+\infty\end{cases}$.

Ex. 2. *On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3n+15} = 0$ *car :* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3n+15 = +\infty \end{cases}$.

Exemples (force 2)

Coach : Bien sûr :

a) la règle $\dfrac{1}{+\infty} = 0^+$ se généralise à $\dfrac{2}{+\infty} = 0^+$, $\dfrac{3}{+\infty} = 0^+$, ..., $\dfrac{-1}{+\infty} = 0^-$, $\dfrac{-2}{+\infty} = 0^-$, $\dfrac{-3}{+\infty} = 0^-$, ...

b) la règle $\dfrac{1}{-\infty} = 0^-$ se généralise à $\dfrac{2}{-\infty} = 0^-$, $\dfrac{3}{-\infty} = 0^-$, ..., $\dfrac{-1}{-\infty} = 0^+$,etc.

c) la règle $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$ se généralise à $\dfrac{2}{0^+} = +\infty$, $\dfrac{3}{0^+} = +\infty$, ..., $\dfrac{-1}{0^+} = -\infty$, etc.

d) la règle $\dfrac{1}{0^-} = -\infty$ se généralise à $\dfrac{2}{0^-} = -\infty$, $\dfrac{3}{0^-} = -\infty$, ..., $\dfrac{-1}{0^-} = +\infty$, etc.

Ex. 3. *On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-31}{2n-3} = 0$ *car :* $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} -31 = -31 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2n-3 = +\infty \end{cases}$.

Ex. 4. *On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{27}{-3n+5} = 0$ *car :* $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 27 = 27 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -3n+5 = -\infty \end{cases}$.

Ex. 5. *On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{13}{7n^2+3} = 0$ *car :* $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 13 = 13 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 7n^2+3 = +\infty \end{cases}$.

EXERCICES-TESTS

Exercice-Test (force 1)

ET1. *Déterminer a)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1}$ *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+4}$ *c)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{-2n+1}$ *d)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{10}{2n-20}$.

Exercices-Tests (force 2)

ET2. *Déterminer a)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{10n+7}$ *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-22}{-0{,}5n-4}$ *c)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{10n^2+3}$.

3. Comment déterminer la limite d'une somme de deux suites ?

Coach : Dans la plupart des cas, la limite d'une somme vaut la somme des limites (sauf le cas où lorsqu'on additionne deux infinis contraires, on obtient une forme indéterminée). C'est ce qu'illustre le tableau ci-dessous.

Méthode

On utilise le tableau ci-dessous donnant la limite de $u_n + v_n$:

$\text{Lim}u_n$ \ $\text{Lim}v_n$	L_2	$+\infty$	$-\infty$
L_1	$L_1 + L_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	f.i
$-\infty$	$-\infty$	f.i	$-\infty$

Coach : Attention $+\infty-\infty$ et $-\infty+\infty$ sont des f.i (formes indéterminées).

Exemples (force 1)

Ex. 1. *On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3+n^2=+\infty$ *car :* $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} n^3=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty\end{cases}$.

Coach : La justification à l'aide des accolades est toujours appréciée dans une copie : elle montre à ton correcteur que tu as bien compris le principe.

Ex. 2. *On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}+n=+\infty$ *car :* $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty\end{cases}$.

Ex. 3. *On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}-n^2=-\infty$ *car :* $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} -n^2=-\infty\end{cases}$.

Ex. 4. *On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\frac{1}{n^2}=3$ *car :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}=0$.

Ex. 5. *On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-3=+\infty$ *car :* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$.

Ex. 6. *On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2+5=-\infty$ *car :* $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2=-\infty$.