<u>**Chapitre 1**</u>

Les vecteurs

En Mathématiques, un vecteur est rigoureusement défini dans le cadre de l'algèbre linéaire comme étant un élément qui appartient à un espace vectoriel. On comprend alors que le vecteur est un objet mathématique abstrait, gouverné par des règles précises au sein d'espaces satisfaisants à une structure bien particulière.
Mais, si l'espace vectoriel mathématiques s'identifie à l'espace physique qui nous entoure (appelé espace affine euclidien de dimension trois, et noté $\mathbb{E}(3)$*, dont le temps est un paramètre), alors le vecteur devient un objet non abstrait. En effet, il se caractérise alors par : une direction, un sens et une norme, c'est-à-dire familièrement « sa longueur ». Ces propriétés caractéristiques ont très rapidement suscitées l'intérêt du physicien. Ce dernier étudie des phénomènes qui lui demandent d'introduire des concepts et des grandeurs nécessitants les caractéristiques de point d'application, direction, sens et norme qu'il préfèrera nommer intensité du vecteur.*
Afin de bien se rendre compte de l'importance des vecteurs en Sciences Physiques, citons, par exemple, quelques-unes des grandeurs vectorielles physiques qui sont familières aux élèves de Terminale S : la position $\vec{r}$*, la vitesse* $\vec{v}$*, l'accélération* $\vec{a}$*, les forces (modélisant les actions mécaniques)* $\vec{F}$*, l'accélération de pesanteur terrestre* $\vec{g}$*, la quantité de mouvement* $\vec{p}$*, le champ électrique* $\vec{E}$*, le champ magnétique* $\vec{B}$*, le champ gravitationnel* $\vec{\mathcal{G}}$ *…*

Mais, ils en existent encore quelques une que nous allons découvrir, et très utiles en mécanique pour étudier les systèmes en rotation :

- *le moment d'une force, noté* $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ *;*
- *le moment cinétique, noté* $\vec{\mathcal{L}}$*.*

On comprend mieux l'importance capitale que peut avoir l'étude des vecteurs pour un physicien ; le mot « vecteur » provenant d'ailleurs du langage du physicien. Au cours du $19^{\text{ième}}$ *siècle, de nombreux mathématiciens ont travaillés aux développements de la théorie vectorielle, citons entre autres : l'allemand Bernard Bolzano (1781 / 1848), les français Jean-Victor Poncelet (1788 / 1867) et Michel Chasles (1793 / 1880), mais il revient à l'italien Giusto Bellavitis (1803 / 1880), en photo ci-dessus, d'être l'auteur de la formulation moderne encore enseignée de nos jours au lycée.*

❶ Définitions et notations

A) Définition

On adoptera la définition suivante :

Définition

> Un vecteur est dans l'espace physique affine euclidien de dimension trois $\mathbb{E}(3)$, un segment directeur orienté entre deux points A vers B, et noté $\overrightarrow{AB}$.

B) Notations

L'exploitation de l'outil vectoriel se fait en suivant des règles bien précises : celles des espaces vectoriels. Ces dernières sont dictées par l'**algèbre**, que vous étudierez en cours de Mathématiques dans votre première année post-bac. L'algèbre nous amène à devoir introduire des notions simples mais particulièrement utiles pour le physicien, et donc qu'ils convient de préciser avec soin. De plus, tout au long de ce chapitre, on utilisera l'expression « d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ » pour laquelle on adoptera la définition suivante :

Définition

> Un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, encore appelé $\mathbb{R}$-espace vectoriel, signifie que les éléments de l'ensemble E sont des vecteurs et que les opérations qu'ils vont subirent font appellent à des nombres réels (souvent appelés « scalaires ») donc appartenant à $\mathbb{R}$.

1) Bases et vecteurs élémentaires de $\mathbb{E}(3)$

La représentation graphique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ au sein de l'espace physique $\mathbb{E}(3)$ oblige à munir ce dernier d'une **base**. Celle-ci a pour but d'adjoindre, à l'espace physique, **trois vecteurs élémentaires** (on dit parfois unitaires, car leur norme est égale à 1) indépendants les uns des autres qui vont définir les trois directions de références, notées x, y et z de $\mathbb{E}(3)$. Ces trois vecteurs élémentaires associés forment une base de cet espace, et on note ceci : $\mathcal{B}_{\mathbb{E}(3)} = \left(\overrightarrow{e_x}\ ;\ \overrightarrow{e_y}\ ;\ \overrightarrow{e_z}\right)_{\mathbb{E}(3)}$.

Dès lors, il est possible d'exprimer n'importe quel vecteur $\overrightarrow{AB}$ de $\mathbb{E}(3)$ comme étant une **combinaison linéaire** des vecteurs de la base choisie. On a alors :

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\, \overrightarrow{e_x} + \beta\, \overrightarrow{e_y} + \gamma\, \overrightarrow{e_z}\,.$$

Dans cette décomposition vectorielle, α, β et γ représentent trois nombres réels qui s'appellent les **composantes** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $\left(\overrightarrow{e_x}\ ;\ \overrightarrow{e_y}\ ;\ \overrightarrow{e_z}\right)_{\mathbb{E}(3)}$. La connaissance des trois composantes d'un vecteur, au sein d'une base préalablement définie, suffit à le décrire parfaitement. Le mathématicien introduit alors les définitions suivantes :

Définition (Sup)

- ✓ Au sein d'un espace vectoriel, si tous les vecteurs peuvent s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs d'une famille vectorielle $\mathcal{F}_E = (\overrightarrow{e_1}\ ;\ \overrightarrow{e_2}\ ; \dots ;\ \overrightarrow{e_n})_E$ alors cette dernière est qualifiée de **génératrice**.

- ✓ Si $\mathcal{F}_E = (\overrightarrow{e_1}\ ;\ \overrightarrow{e_2}\ ; \dots ;\ \overrightarrow{e_n})_E$ est une famille vectorielle d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ et on considère l'ensemble $(\lambda_1\ ;\ \lambda_2\ ; \dots ;\ \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $\overrightarrow{0_E}$ le vecteur nul de l'espace vectoriel E. La famille $\mathcal{F}_E$ est qualifiée de **libre** si, sur E, on vérifie :

$$\lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0_E} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

- ✓ Toute famille de vecteurs libre et génératrice d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ constitue une base de E.

- ✓ Toute base d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ constitue une famille de vecteurs libre et génératrice.

- ✓ Le nombre de vecteur formant la base d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ s'appelle la **dimension**, et se note $dim(E)$.

♣ *Remarque : le choix d'une base au sein d'un espace vectoriel n'est pas unique. D'ailleurs, pour l'espace physique considéré, il y a une infinité de bases possibles.*

2) Repères de $\mathbb{E}(3)$

La représentation graphique d'un vecteur, au sein de l'espace $\mathbb{E}(3)$, oblige de définir une origine à la base choisie. En général, cette origine est notée O. Lorsque le physicien décide de munir une base d'une origine, alors il créé un **repère** de l'espace $\mathbb{E}(3)$. Et on le note : $R_{\mathbb{E}(3)} = \left(O\ ;\overrightarrow{e_x}\ ;\ \overrightarrow{e_y}\ ;\ \overrightarrow{e_z}\right)_{\mathbb{E}(3)}$. Ce dernier permet donc au physicien de pouvoir repérer un point au sein de l'espace $\mathbb{E}(3)$. Le repère $R_{\mathbb{E}(3)} = \left(O\ ;\overrightarrow{e_x}\ ;\ \overrightarrow{e_y}\ ;\ \overrightarrow{e_z}\right)_{\mathbb{E}(3)}$ du physicien est très souvent qualifié d'orthonormé. Cela signifie simplement que les trois vecteurs de la base sont de norme égale à un, et qu'ils sont tous orthogonaux deux à deux entre eux. Par convention, la norme est notée par le symbole $\|\ \ \|$. D'où :

Propriétés

Soit un repère $R_{\mathbb{E}(3)} = \left(O\ ;\overrightarrow{e_x}\ ;\ \overrightarrow{e_y}\ ;\ \overrightarrow{e_z}\right)_{\mathbb{E}(3)}$. Celui-ci est orthonormé si et seulement si les vecteurs qui le composent vérifient les propriétés suivantes :

- ✓ $\|\overrightarrow{e_x}\| = \|\overrightarrow{e_y}\| = \|\overrightarrow{e_z}\| = 1$
- ✓ $\overrightarrow{e_x} \perp \overrightarrow{e_y}$
- ✓ $\overrightarrow{e_x} \perp \overrightarrow{e_z}$
- ✓ $\overrightarrow{e_y} \perp \overrightarrow{e_z}$

♣ *Remarque : le choix d'une origine au sein d'un espace vectoriel n'est pas unique, et donc il existe également une infinité de repères au sein de l'espace physique. De plus les changements de repères engendrent quelques complications dans l'écriture des lois physiques.*

3) Référentiels de $\mathbb{E}(3)$

Le physicien a certes besoin de repérer des points de son espace, mais il préfèrera, sans aucun doute, être capable de suivre ces points au sein de l'espace $\mathbb{E}(3)$. En effet, les points considérés évoluent suivant le **paramètre temporel**, et prennent donc successivement différentes positions. C'est pourquoi, le physicien va munir un repère d'une **horloge**. Celle-ci lui permettant de caractériser l'évolution du paramètre « temps ». Ainsi, il créé un objet qui lui permet simultanément de posséder deux références : l'une géométrique (l'origine O) et l'autre temporelle (celle de l'horloge).
Cet objet est un **référentiel** de l'espace physique $\mathbb{E}(3)$, qu'il note : $\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)} = \left(O\,; \overrightarrow{e_x}\,; \overrightarrow{e_y}\,; \overrightarrow{e_z}\,; t\right)_{\mathbb{E}(3)}$. Au fur et à mesure de l'évolution du temps, la position des points d'étude évoluent au sein du référentiel choisi. Donc, les trois composantes deviennent des fonctions du temps. C'est pourquoi il est d'usage de noter, au sein du référentiel $\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}$, la combinaison linéaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme :

$$\overrightarrow{AB}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}} = \alpha(t)\,\overrightarrow{e_x} + \beta(t)\,\overrightarrow{e_y} + \gamma(t)\,\overrightarrow{e_z}\,.$$

Mais lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté sur le référentiel de travail, le physicien préfèrera noter (uniquement par soucis de simplification d'écriture) $\overrightarrow{AB}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}} = \overrightarrow{AB}$.
Lorsque les deux points participants au vecteur (parfois encore appelé bipoint) sont définis par leur coordonnées $A(x_A(t)\,;\,y_A(t)\,;\,z_A(t)\,)$ et $B(x_B(t)\,;\,y_B(t)\,;\,z_B(t)\,)$ alors on a :

$$\begin{cases} \alpha(t) = x_B(t) - x_A(t) \\ \beta(t) = y_B(t) - y_A(t) \\ \gamma(t) = z_B(t) - z_A(t) \end{cases}$$

4) Représentation

L'évolution, temporelle et géométrique, d'un point $M\big(x(t)\,;\,y(t)\,;z(t)\big)$ au sein d'un référentiel $\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}$ est donc donnée par $\overrightarrow{OM}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}} = x(t)\,\overrightarrow{e_x} + y(t)\,\overrightarrow{e_y} + z(t)\,\overrightarrow{e_z}$, et se représente comme :

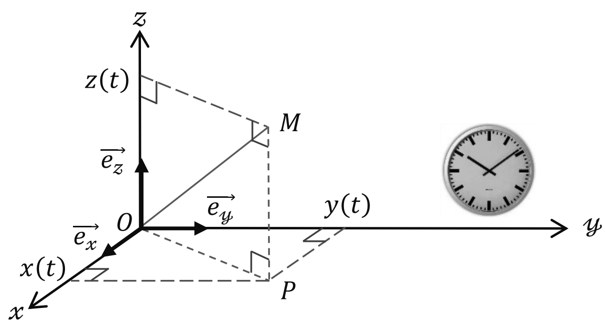

Figure 1 : Référentiel associé à l'espace physique

Bien souvent, pour des raisons de simplicité, on adopte les notations verticales faisant uniquement apparaître les composantes du vecteur :

$$\overrightarrow{OM}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}} = x(t)\,\overrightarrow{e_x} + y(t)\,\overrightarrow{e_y} + \mathrm{z}(t)\,\overrightarrow{e_z} = \left|\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ \mathrm{z}(t) \end{array}\right._{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}$$

En mécanique les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}$, qui est associé à l'étude du mouvement d'un point, sont appelées **les équations horaires** du mouvement.

5) Expression de la norme

- *Définition intuitive*

En géométrie euclidienne classique, la norme d'un vecteur représente la longueur du segment portant le vecteur. Ce qui implique que la norme est toujours positive ou nulle. Nous allons donc calculer $\left\|\overrightarrow{OM}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}\right\|$. Pour cela, il suffit de remarquer que $[OP]$ est, dans le plan (de base) inférieur $\Pi(xOy)$, la diagonale d'un rectangle donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle. Donc le théorème de *Pythagore* (580 avant J.C. / 495 avant J.C.) nous permet d'écrire que $OP^2 = x(t)^2 + y(t)^2$. De plus, dans le triangle OPM rectangle en P, l'application du théorème de Pythagore nous permet d'écrire que $OM^2 = OP^2 + PM^2 = OP^2 + z(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2$. Finalement, on trouve que :

Définition

Soit un référentiel $\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)} = \left(O\,;\overrightarrow{e_x}\,;\,\overrightarrow{e_y}\,;\,\overrightarrow{e_z}\,;t\right)_{\mathbb{E}(3)}$. La norme d'un vecteur est égale à la racine carrée de la somme des carrés des composantes de ce vecteur. Si :

$$\overrightarrow{OM}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}} = x(t)\,\overrightarrow{e_x} + y(t)\,\overrightarrow{e_y} + \mathrm{z}(t)\,\overrightarrow{e_z}$$

alors

$$\left\|\overrightarrow{OM}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}\right\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$$

La relation précédente permet de calculer une norme mais en aucun cas n'est une définition rigoureuse. Elle convient donc au physicien mais pas au mathématicien.

- *Définition rigoureuse*

L'algèbre présente l'avantage d'offrir une définition formelle et précise de la norme d'un vecteur. On a :

Définition (Sup)

La norme sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, est une application notée $\mathcal{N}$ qui admet uniquement des valeurs réelles positives ou nulle, et devant satisfaire aux trois hypothèses suivantes :

- ✓ la séparation : $\forall\,\vec{u} \in E, \mathcal{N}(\vec{u}) = 0 \implies \vec{u} = \overrightarrow{0_E}$
- ✓ l'homogénéité : $\forall\,\vec{u} \in E,\ \forall\,\lambda \in \mathbb{R},\ \mathcal{N}(\lambda\vec{u}) = |\lambda|\mathcal{N}(\vec{u})$
- ✓ l'inégalité triangulaire : $\forall\,(\vec{u}\,;\,\vec{v}) \in E^2,\ \mathcal{N}(\vec{u}+\vec{v}) \leq \mathcal{N}(\vec{u}) + \mathcal{N}(\vec{v})$

En Mathématiques, un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé.

❷ Opérations

A) L'addition

Il est aisé d'additionner deux vecteurs. En effet, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteur de $\mathbb{E}(3)$, alors dans $\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}$ on a :

Propriétés

Si $\vec{u} = x_u(t)\,\overrightarrow{e_x} + y_u(t)\,\overrightarrow{e_y} + z_u(t)\,\overrightarrow{e_z}$ et $\vec{v} = x_v(t)\,\overrightarrow{e_x} + y_v(t)\,\overrightarrow{e_y} + z_v(t)\,\overrightarrow{e_z}$ alors on a :

$$\vec{u} + \vec{v} = {}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}\left|\begin{array}{l} x_u(t) \\ y_u(t) \\ z_u(t) \end{array}\right. + {}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}\left|\begin{array}{l} x_v(t) \\ y_v(t) \\ z_v(t) \end{array}\right. = {}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}\left|\begin{array}{l} x_u(t) + x_v(t) \\ y_u(t) + y_v(t) \\ z_u(t) + z_v(t) \end{array}\right.$$

Ceci est à mettre en corrélation avec la célèbre relation de Chasles, à savoir que, si A, B et C sont trois points de l'espace physique $\mathbb{E}(3)$, alors on a la relation suivante :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A\boldsymbol{B}} + \overrightarrow{\boldsymbol{B}C}.$$

Cette relation pouvant évidemment s'étendre à plusieurs points relais, autre que B.

En terme de construction, cela signifie simplement que l'on doit mettre un « représentant » de $\vec{v}$ à l'extrémité de $\vec{u}$ et tracer le vecteur partant du début de $\vec{u}$ à la fin du « représentant » de $\vec{v}$:

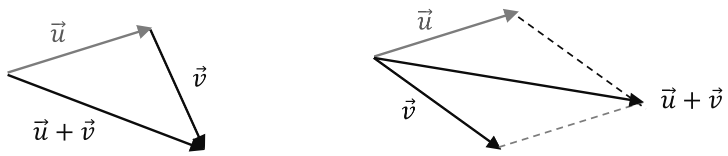

Figure 2 : L'addition vectorielle

B) L'égalité

L'égalité de deux vecteurs s'énonce de la manière suivante :

Définition

Deux vecteurs exprimés dans référentiel $\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)} = \left(O\,;\overrightarrow{e_x}\,;\,\overrightarrow{e_y}\,;\,\overrightarrow{e_z}\,;\,t\right)_{\mathbb{E}(3)}$ sont égaux si et seulement si ils ont des composantes de mêmes natures égales.

C) L'opposé

La définition du vecteur opposé est très intuitive. En effet, elle est à rapprocher de celle des nombres et s'en inspire.

Définition

Soit $\vec{u} = x(t)\,\overrightarrow{e_x} + y(t)\,\overrightarrow{e_y} + z(t)\,\overrightarrow{e_z}$ un de l'espace physique $\mathbb{E}(3)$. On définit le vecteur $\vec{v}_{op(\vec{u})}$ opposé à $\vec{u}$ par la propriété suivante :

$$\vec{u} + \vec{v}_{op(\vec{u})} = \overrightarrow{0_{\mathbb{E}(3)}}.$$

Cette définition nous permet d'écrire que :

$$\vec{u} + \vec{v}_{op(\vec{u})} = {}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}\left|\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{matrix}\right. + {}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}\left|\begin{matrix} x_{op}(t) \\ y_{op}(t) \\ z_{op}(t) \end{matrix}\right. = {}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}\left|\begin{matrix} x(t) + x_{op}(t) \\ y(t) + y_{op}(t) \\ z(t) + z_{op}(t) \end{matrix}\right.$$

Ainsi, on obtient :

$$\vec{u} + \vec{v}_{op(\vec{u})} = \overrightarrow{0_{\mathbb{E}(3)}} \iff {}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}\left|\begin{matrix} x(t) + x_{op}(t) \\ y(t) + y_{op}(t) \\ z(t) + z_{op}(t) \end{matrix}\right. = {}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. \implies \begin{cases} x(t) + x_{op}(t) = 0 \\ y(t) + y_{op}(t) = 0 \\ z(t) + z_{op}(t) = 0 \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} x_{op}(t) = -x(t) \\ y_{op}(t) = -y(t) \\ z_{op}(t) = -z(t) \end{cases} \implies \vec{v}_{op(\vec{u})} = -\vec{u}.$$

Donc, on constate que $\vec{v}_{op(\vec{u})}$ à la même direction (donc colinéaire) et la même norme que $\vec{u}$. En revanche, ils ont des sens opposés :

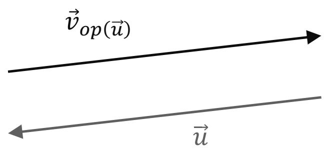

Figure 3 : Deux vecteurs opposés

D) La soustraction

Par définition, la soustraction par une certaine quantité consiste, en réalité, à rajouter l'opposé de la quantité considérée. C'est pourquoi, même dans un espace vectoriel, on adopte le même principe, à savoir : pour soustraire un vecteur $\vec{v}$, on ajoute son vecteur opposé $\vec{v}_{op(\vec{v})}$. D'où la règle élémentaire suivante :

Définition

Si $\vec{u} = x_u(t)\,\overrightarrow{e_x} + y_u(t)\,\overrightarrow{e_y} + z_u(t)\,\overrightarrow{e_z}$ et $\vec{v} = x_v(t)\,\overrightarrow{e_x} + y_v(t)\,\overrightarrow{e_y} + z_v(t)\,\overrightarrow{e_z}$ sont deux vecteurs de l'espace physique $\mathbb{E}(3)$ alors on a :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_{op(\vec{v})} = \vec{u} + (-\vec{v}) \quad {}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}\left|\begin{array}{l} x_u(t) \\ y_u(t) \\ z_u(t) \end{array}\right. + \quad {}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}\left|\begin{array}{l} -x_v(t) \\ -y_v(t) \\ -z_v(t) \end{array}\right.$$

Soit

$$\vec{u} - \vec{v} = \quad {}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}\left|\begin{array}{l} x_u(t) - x_v(t) \\ y_u(t) - y_v(t) \\ z_u(t) - z_v(t) \end{array}\right.$$

En terme de construction, cela signifie simplement que l'on doit mettre un « représentant » de $-\vec{v}$ à l'extrémité de $\vec{u}$ et tracer le vecteur partant du début de $\vec{u}$ à la fin du « représentant » de $-\vec{v}$:

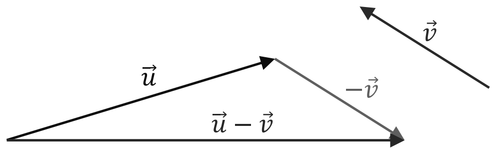

Figure 4 : Soustraction de deux vecteurs

E) La multiplication par un scalaire

En géométrie, un scalaire est un nombre réel. Le fait de multiplier un vecteur de l'espace physique $\mathbb{E}(3)$, engendrera un vecteur colinéaire. Et plus exactement :

Propriétés

Si $\vec{u} = x(t)\,\overrightarrow{e_x} + y(t)\,\overrightarrow{e_y} + z(t)\,\overrightarrow{e_z}$ est un vecteur de l'espace physique $\mathbb{E}(3)$ et λ un scalaire, alors on a :

- ✓ $\lambda\vec{u} = \lambda \times \quad {}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}\left|\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array}\right. = \quad {}_{\mathcal{R}_{\mathbb{E}(3)}}\left|\begin{array}{l} \lambda x(t) \\ \lambda y(t) \\ \lambda z(t) \end{array}\right.$

- ✓ $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$

F) Vecteur unitaire

En Sciences Physiques, les vecteurs unitaires sont très utiles donc très présents. En effet, comme leur norme est égale à l'unité, ils permettent de caractériser vectoriellement une grandeur physique sans agir en aucune façon sur la norme de la