## Chapitre XIII

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

### § 1. Position du problème. Equation du mouvement du corps pour un milieu où la résistance est proportionnelle à la vitesse. Equation de la chaînette

Supposons que la fonction $y = f(x)$ exprime un phénomène du point de vue quantitatif. Examinant ce phénomène, il est souvent impossible d'établir directement le caractère de la dépendance entre $y$ et $x$, mais l'on peut établir une dépendance entre les quantités $x$, $y$ et les dérivées de $y$ par rapport à $x$: $y'$, $y''$, ..., $y^{(n)}$, c'est-à-dire que l'on peut écrire une **équation différentielle**.

On demande de déduire de la relation entre $x$, $y$ et les dérivées la relation directe entre $y$ et $x$, c'est-à-dire de trouver $y = f(x)$, ce qu'on appelle encore **intégrer une équation différentielle**.

Considérons deux exemples.

Exemple 1. On laisse tomber un corps de masse $m$ d'une certaine hauteur. On demande d'établir la loi de variation de la vitesse de chute $v$ si le corps éprouve une résistance de freinage de la part de l'air proportionnelle à la vitesse (le coefficient de proportionnalité étant $k$), c'est-à-dire de trouver $v = f(t)$.

Solution. En vertu de la seconde loi de Newton

$$m\frac{dv}{dt} = F,$$

où $\frac{dv}{dt}$ est l'accélération du corps en mouvement (la dérivée de la vitesse par rapport au temps) et $F$ la force agissant sur le corps dans le sens du mouvement. Cette force est constituée de deux forces: de la force de pesanteur $mg$ et de la résistance de l'air $-kv$ (on prend le signe moins car cette force est opposée à la vitesse). Ainsi

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv. \tag{1}$$

Nous avons une relation entre la fonction inconnue $v$ et sa dérivée $\frac{dv}{dt}$, c'est-à-dire **une équation différentielle portant sur la fonction inconnue** $v$. (C'est l'équation du mouvement de certains types de parachutes.) Résoudre cette équation différentielle, c'est chercher une fonction $v = f(t)$ la vérifiant identiquement. Il existe une infinité de telles solutions. Le lecteur vérifiera facilement que toute fonction de la forme

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \tag{2}$$

vérifie l'équation (1) quelle que soit la constante $C$. Mais laquelle de ces fonctions donne la relation cherchée entre $v$ et $t$ ? Pour la trouver, imposons une condition supplémentaire: une vitesse initiale $v_0$ (qui, notamment, peut être nulle) a été communiquée au corps au départ; nous supposerons que cette vitesse initiale est connue. Mais alors la fonction cherchée $v = f(t)$ doit être telle que l'on ait pour $t = 0$ (au début du mouvement) $v = v_0$. Substituant $t = 0$, $v = v_0$ dans la formule (2), on trouve:

$$v_0 = C + \frac{mg}{k},$$

d'où

$$C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

Ainsi, la constante $C$ est déterminée. La dépendance entre $v$ et $t$ s'exprime donc :

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}. \qquad (2')$$

Il découle de cette formule que pour $t$ suffisamment grands la vitesse $v$ dépend peu de $v_0$.

Notons que si $k = 0$ (c'est-à-dire si la résistance de l'air est nulle ou négligeable), on retrouve un résultat connu en physique *):

$$v = v_0 + gt. \qquad (2'')$$

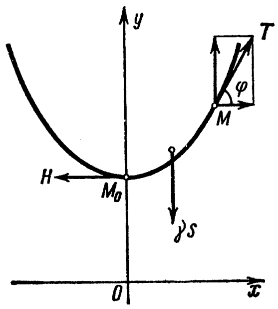


Fig. 249

Cette fonction satisfait à l'équation différentielle (1) et à la condition initiale: $v = v_0$ pour $t = 0$.

E x e m p l e 2. Un fil flexible homogène est suspendu par ses deux extrémités. Trouver l'équation de la courbe d'équilibre du fil soumis à son propre poids (telle est la position que prennent les fils, les chaînes, les câbles suspendus).

S o l u t i o n. Soient $M_0$ (0, $b$) le point le plus bas sur le fil, $M$ un point arbitraire sur ce fil (fig. 249). Considérons la portion de fil $M_0M$. Cette portion est en équilibre sous l'action de trois forces:

1) la tension $T$, agissant tangentiellement au point $M$ et formant avec l'axe $Ox$ l'angle $\varphi$;

2) la tension $H$ au point $M_0$, agissant horizontalement;

3) le poids $\gamma s$ dirigé verticalement vers le bas, où $s$ est la longueur de l'arc $M_0M$, $\gamma$ le poids spécifique du fil.

Décomposant la tension $T$ en ses composantes horizontale et verticale, on obtient les équations d'équilibre:

$$T \cos\varphi = H,$$
$$T \sin\varphi = \gamma s.$$

---

*) On peut déduire la formule (2″) à partir de (2′) par le passage à la limite

$$\lim_{k\to 0}\left[\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}\right] = v_0 + gt.$$

On obtient en divisant membre à membre ces deux égalités

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma}{H} s. \tag{3}$$

Supposons maintenant que l'on puisse écrire l'équation de la courbe cherchée sous la forme $y = f(x)$. Ici, $f(x)$ est une fonction inconnue qu'il faut chercher. Remarquons que

$$\operatorname{tg} \varphi = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Par conséquent,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} s, \tag{4}$$

où l'on a posé $\frac{H}{\gamma} = a$.

Dérivons les deux membres de l'égalité (4) par rapport à $x$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx}. \tag{5}$$

Mais on sait que (voir § 1, ch. VI)

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Substituant cette expression dans l'équation (5), on obtient l'équation différentielle de la courbe cherchée sous la forme:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{6}$$

Elle relie les dérivées première et seconde de la fonction inconnue $y$.

Sans nous arrêter sur les méthodes de résolution des équations, indiquons que toute fonction de la forme

$$y = a \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2 \tag{7}$$

satisfait à l'équation (6) quelles que soient les constantes $C_1$ et $C_2$. Il est facile de s'en convaincre en substituant les dérivées première et seconde de la fonction mentionnée dans l'équation (6). Indiquons encore sans le démontrer qu'on a là toutes les solutions (pour divers $C_1$ et $C_2$) de l'équation (6). Cela sera démontré au § 18.

Les graphiques des fonctions ainsi obtenues sont appelés des *chaînettes*.

Voyons maintenant comment il convient de choisir les constantes $C_1$ et $C_2$ pour obtenir précisément la chaînette dont le point inférieur a pour coordonnées $(0, b)$. Etant donné que pour $x = 0$ on a le point le plus bas de la chaînette, la tangente est horizontale en ce point, c.-à-d. $\frac{dy}{dx} = 0$. En outre, par hypothèse, l'ordonnée est égale à $b$ en ce point, c.-à-d. $y = b$.

On déduit de l'équation (7)

$$y' = \operatorname{sh} \left(\frac{x}{a} + C_1\right).$$

Substituant dans cette dernière $x = 0$, on obtient $0 = \operatorname{sh} C_1$. Donc $C_1 = 0$. Si $b$ est l'ordonnée de $M_0$, on a alors $y = b$ pour $x = 0$. On déduit de l'équation (7) en posant $x = 0$ et $C_1 = 0$, $b = \frac{a}{2}(1 + 1) + C_2$, d'où $C_2 = b - a$. On trouve en définitive:

$$y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right) + b - a.$$

L'équation (7) se simplifie beaucoup si l'on prend l'ordonnée du point $M_0$ égale à $a$. L'équation de la chaînette devient alors:

$$y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right).$$

## § 2. Définitions

Définition 1. On appelle *équation différentielle* une équation établissant une relation entre la variable indépendante $x$, la fonction inconnue $y = f(x)$ et ses dérivées $y'$, $y''$, . . ., $y^{(n)}$.

On peut écrire symboliquement une équation différentielle comme suit:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ou

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Si $y = f(x)$ est fonction d'une seule variable indépendante, l'équation différentielle est dite ordinaire. Nous nous bornerons à l'étude des équations différentielles ordinaires *).

Définition 2. On appelle *ordre* d'une équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée contenue dans cette équation.

Ainsi,

$$y' - 2xy^2 + 5 = 0$$

est une équation du premier ordre.

*) En même temps que les équations différentielles ordinaires, on étudie également en analyse mathématique des équations aux dérivées partielles. On appelle *équation aux dérivées partielles* une relation entre la fonction inconnue $z$, dépendant de deux ou de plusieurs variables $x$, $y$, . . ., ces variables elles-mêmes et les dérivées partielles de $z$: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, etc.

On a comme exemple d'équation aux dérivées partielles de fonction inconnue $z(x, y)$ l'équation

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Il est facile de vérifier que la fonction $z = x^2y^2$ (ainsi que quantité d'autres fonctions) vérifie cette équation.

Dans ce cours les équations aux dérivées partielles sont étudiées dans le chapitre XVIII (t. II).

L'équation

$$y'' + ky' - by - \sin x = 0$$

est une équation du second ordre, etc.

L'équation considérée dans l'exemple 1 du paragraphe précédent est une équation du premier ordre et celle de l'exemple 2 du second ordre.

D é f i n i t i o n 3. On appelle *solution* ou *intégrale* d'une équation différentielle toute fonction $y = f(x)$ vérifiant identiquement cette équation.

E x e m p l e 1. Soit l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Les fonctions $y = \sin x$, $y = 2 \cos x$, $y = 3 \sin x - \cos x$ et, plus généralement, toute fonction de la forme $y = C_1 \sin x$, $y = C_2 \cos x$ ou

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

sont des solutions de l'équation donnée quelles que soient les constantes $C_1$ et $_2$; il est facile de s'en assurer en substituant ces fonctions dans l'équation.

E x e m p l e 2. Considérons l'équation

$$y'x - x^2 - y = 0.$$

Ses solutions sont des fonctions de la forme

$$y = x^2 + Cx,$$

où $C$ est une constante arbitraire. En effet, on trouve en dérivant la fonction $y = x^2 + Cx$:

$$y' = 2x + C.$$

Substituant les expressions de $y$ et $y'$ dans l'équation donnée, on obtient l'identité

$$(2x + C)\, x - x^2 - x^2 - Cx = 0.$$

Chacune des équations traitées dans les exemples 1 et 2 possède une infinité de solutions.

## § 3. Equations différentielles du premier ordre (notions générales)

1. Une équation différentielle du p r e m i e r ordre est de la forme

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Lorsque cette équation est résoluble en $y'$, on peut la mettre sous la forme

$$y' = f(x, y). \tag{1'}$$

On dit alors que l'équation différentielle est résoluble par rapport à la dérivée. On a pour une telle équation le théorème suivant sur l'existence et l'unicité de la solution.

Théorème. *Si dans l'équation*

$$y' = f(x, y)$$

*la fonction* $f(x, y)$ *et sa dérivée partielle* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *par rapport à* $y$ *sont continues dans un certain domaine* $D$ *du plan* $Oxy$ *et si* $(x_0, y_0)$ *est un point de ce domaine, il existe une solution unique* $y = \varphi(x)$ *satisfaisant à la condition* $y = y_0$ *lorsque* $x = x_0$.

Ce théorème sera démontré au § 27, chapitre XVI. Géométriquement, le théorème signifie qu'il existe une fonction $y = \varphi(x)$ et une seule dont la courbe représentative passe par le point $(x_0, y_0)$.

Il résulte de ce théorème que l'équation (1′) possède une infinité de solutions différentes [par exemple, la solution passant par le point $(x_0, y_0)$; la solution passant par le point $(x_0, y_1)$; celle passant par le point $(x_0, y_2)$, etc., pourvu que ces points se trouvent dans le domaine $D$].

La condition que la fonction $y$ doit prendre la valeur donnée $y_0$ lorsque $x = x_0$ s'appelle la *condition initiale*. Souvent on l'écrit sous la forme

$$y\,|_{x=x_0} = y_0.$$

Définition 1. On appelle *solution générale* d'une équation du premier ordre une fonction

$$y = \varphi(x, C), \tag{2}$$

dépendant d'une constante arbitraire $C$ et satisfaisant aux conditions suivantes:

a) elle satisfait à l'équation différentielle quelle que soit la valeur concrète de la constante $C$;

b) quelle que soit la condition initiale $y = y_0$ lorsque $x = x_0$, c.-à-d. $(y)_{x=x_0} = y_0$, on peut trouver une valeur $C = C_0$ telle que la fonction $y = \varphi(x, C_0)$ vérifie la condition initiale donnée. On suppose alors que les valeurs $x_0$ et $y_0$ appartiennent au domaine de variation des variables $x$ et $y$ dans lequel sont observées les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution.

2. Cherchant la solution générale d'une équation différentielle, nous sommes souvent conduits à une relation de la forme

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{2'}$$

non résolue en $y$. On obtient la solution générale en résolvant cette relation par rapport à $y$. Toutefois, il n'est pas toujours possible d'exprimer $y$ à partir de (2′) au moyen de fonctions élémentaires; on conserve alors la solution générale sous forme implicite. Une égalité de la forme $\Phi(x, y, C) = 0$, donnant implicitement la solution générale, s'appelle l'*intégrale générale* de l'équation différentielle.

D é f i n i t i o n 2. On appelle *solution particulière* toute fonction $y = \varphi(x, C_0)$ déduite de la solution générale $y = \varphi(x, C)$, en posant dans cette dernière $C = C_0$. La relation $\Phi(x, y, C_0) = 0$ est dite alors une *intégrale particulière* de l'équation.

E x e m p l e 1. L'équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

a pour solution générale une famille de fonctions $y = \frac{C}{x}$; on peut le vérifier par une simple substitution dans l'équation.

Cherchons la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales: $y_0 = 1$ lorsque $x_0 = 2$. Substituant ces valeurs dans la formule $y = \frac{C}{x}$, on obtient $1 = \frac{C}{2}$ ou $C = 2$. La solution particulière cherchée est donc la fonction $y = \frac{2}{x}$.

Du point de vue géométrique, l'i n t é g r a l e g é n é r a l e représente une f a m i l l e d e c o u r b e s planes dépendant d'un paramètre $C$. Ces courbes sont appelées les c o u r b e s i n t é g r a l e s de l'équation différentielle donnée. Une intégrale p a r t i c u l i è r e est représentée par u n e c o u r b e de cette famille passant par un point donné du plan.

Ainsi, dans l'exemple considéré, l'intégrale générale est représentée géométriquement par la famille d'hyperboles $y = \frac{C}{x}$ et l'intégrale particulière, définie par la condition initiale donnée, par l'hyperbole passant par le point $M_0(2, 1)$. On a représenté sur la figure 250 les courbes de la famille correspondant aux diverses valeurs: $C = \frac{1}{2}$, $C = 1$, $C = 2$, $C = -1$, etc.

Pour faciliter les raisonnements, nous appellerons par la suite s o l u t i o n d e l'é q u a t i o n non seulement la fonction $y = \varphi(x, C_0)$ satisfaisant à l'équation proposée, mais encore la c o u r b e i n t é g r a l e correspondante. Ceci étant, on parlera, par exemple, de la s o l u t i o n p a s s a n t p a r l e p o i n t $(x_0, y_0)$.

R e m a r q u e. L'équation $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ n'admet pas de solution passant par un point de l'axe $Oy$ (fig. 250). Ceci est dû à ce que le second membre de l'équation est indéterminé pour $x = 0$ et, par conséquent, n'est pas continu.

R é s o u d r e ou i n t é g r e r une équation différentielle consiste à:

a) chercher sa solution générale ou son intégrale générale (si les conditions initiales ne sont pas données) ou

b) chercher la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales (s'il y en a).

3. Donnons l'interprétation géométrique des équations différentielles du premier ordre.

Soit donnée une équation différentielle résolue par rapport à la dérivée :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1'}$$

et soit $y = \varphi(x, C)$ sa solution générale. Cette solution générale définit la famille de courbes intégrales dans le plan $Oxy$.

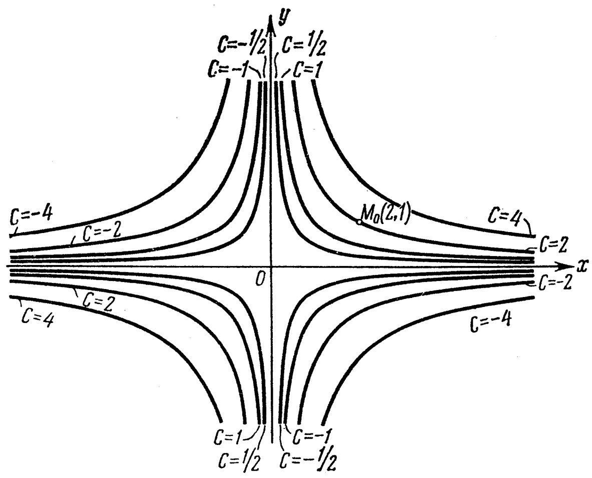


Fig. 250

L'équation (1') détermine pour tout point $M$, de coordonnées $x$ et $y$, une valeur de la dérivée $\frac{dy}{dx}$, c.-à-d. le coefficient angulaire de la tangente à la courbe intégrale passant par ce point. Par conséquent, l'équation différentielle (1') définit un ensemble de directions ou, comme on dit, un champ de directions dans le plan $Oxy$.

Du point de vue géométrique, l'intégration d'une équation différentielle consiste à trouver les courbes dont la tangente en chaque point est confondue avec la direction du champ en ce point.

On appelle *isocline* de l'équation différentielle (1) le lieu géométrique des points vérifiant la relation $\frac{dy}{dx} = C = \text{const.}$

A chaque valeur de $C$ correspond une isocline. Il est évident que pour la valeur $C$ l'isocline aura pour équation $f(x, y) = C$.