

# Sommaire

## Algèbre et géométrie 2<sup>e</sup> année

<b>Chapitre 1. Structures algébriques</b> .....	<b>9</b>
Un groupe forcément abélien .....	10
Réunion de deux sous-groupes .....	11
A quoi est isomorphe un groupe monogène ? .....	12
Le théorème chinois .....	13
Caractérisation des groupes finis .....	14
Groupe $GL_2(\mathbb{Z})$ .....	15
Le théorème de Lagrange .....	16
Les matrices tridiagonales symétriques ont une structure d'espace vectoriel .....	17
Centre de $M_n(\mathbb{R})$ .....	18
Produit des éléments d'un corps fini .....	19
<b>Chapitre 2. Valeurs propres, vecteurs propres</b> .....	<b>20</b>
Recherche de valeurs propres par le polynôme caractéristique .....	20
Recherche de sous-espaces propres par les noyaux .....	21
Valeur propre par simple observation .....	22
Vecteurs propres de l'opérateur de dérivation .....	23
Valeurs propres d'une matrice de rotation .....	24
$f \circ g$ et $g \circ f$ ont mêmes valeurs propres .....	25
Un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -e.v. admet toujours un hyperplan stable .....	26
Un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -e.v. est toujours trigonalisable .....	27
Les secrets du polynôme annulateur .....	28
Les valeurs propres d'1 matrice antisymétrique sont nulles ou imaginaires .....	29
Un projecteur est toujours diagonalisable .....	30
Matrice compagnon de Frobenius .....	31
<b>Chapitre 3. Réduction d'une matrice</b> .....	<b>32</b>
Diagonalisation d'une matrice $2 \times 2$ .....	32
Diagonalisation délicate d'une matrice $2 \times 2$ .....	33
Diagonalisation d'une matrice $3 \times 3$ .....	34
Diagonalisation délicate d'une matrice $3 \times 3$ .....	35
Diagonalisation de la matrice $(x_i x_j)_{1 \leq i, j \leq 3}$ .....	36
Une famille de matrices toujours diagonalisables .....	37
Calcul d'une puissance de matrice $n^{\circ} 1$ .....	38
Calcul d'une puissance de matrice $n^{\circ} 2$ .....	39
Expression de suites récurrentes linéaires .....	40
Trigonalisation « facile » d'une matrice .....	41
Trigonalisation « délicate » d'une matrice .....	42
Trigonalisation par Jordan .....	43
Equation matricielle .....	44
Matrice diagonalisable et puissances .....	45

<b>Chapitre 4. Espaces vectoriels normés.....</b>	<b>46</b>
Norme p et norme infinie .....	46
Suite et suites extraites .....	47
Toute suite convergente est de Cauchy.....	48
Les caractérisations de Banach .....	49
<b>Chapitre 5. Convexité .....</b>	<b>50</b>
La fonction valeur absolue est convexe .....	50
La fonction carré est convexe .....	51
Généralisation de l'inégalité de convexité.....	52
L'inégalité de Hölder.....	53
Moyenne géométrique $\leq$ Moyenne arithmétique.....	54
La boule ouverte est convexe ! .....	55
Inégalités sur n réels strictement positifs .....	56
Inégalité sur les déterminants de matrices symétriques définies positives.....	57
<b>Chapitre 6. Topologie des espaces vectoriels normés .....</b>	<b>58</b>
Une boule ouverte est ... ouverte !.....	58
Une boule fermée est ... fermée ! .....	59
Norme et produit scalaire sont continus .....	60
Les vecteurs libres forment un ouvert .....	61
L'adhérence d'un convexe est convexe !.....	62
L'intérieur d'un convexe est convexe !.....	63
Tout compact est fermé-borné .....	64
Densités (intervalles et boules) .....	65
$GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{C})$ .....	66
<b>Chapitre 7. Espaces préhilbertiens réels .....</b>	<b>67</b>
Produit scalaire sur les matrices .....	67
Produit scalaire sur les fonctions affines.....	68
Projection vectorielle sur une droite .....	69
Projection vectorielle sur un plan .....	70
Minimum d'une intégrale par projection .....	71
Minimum d'une fonction à deux variables .....	72
<b>Chapitre 8. Endomorphismes des espaces euclidiens .....</b>	<b>73</b>
Rotation et sa matrice .....	73
Matrice de rotation.....	74
Matrice de réflexion .....	75
Matrice d'anti-rotation.....	76
Matrice d'une projection orthogonale .....	77
Matrice d'une symétrie orthogonale .....	78
Majoration de la somme des éléments d'une matrice orthogonale.....	79
<b>Chapitre 9. Fonctions vectorielles, arcs paramétrés .....</b>	<b>80</b>
L'astroïde.....	80
La cycloïde .....	81
La deltoïde.....	82
La cardioïde.....	83

La lemniscate de Bernoulli .....	84
Histoire de points stationnaires .....	85
Histoire de branches infinies .....	86

### Analyse et probabilités 2<sup>e</sup> année

<b>Chapitre 1. Séries numériques et vectorielles.....</b>	<b>87</b>
Une jolie série télescopique .....	88
Le théorème de Cauchy .....	89
Riemann par Cauchy.....	90
Bertrand par Cauchy .....	91
Critère de comparaison série-intégrale .....	92
Utilisation du critère de comparaison série-intégrale .....	93
Deux séries de même nature .....	94
Une série très liée à une suite.....	95
<b>Chapitre 2. Familles sommables.....</b>	<b>96</b>
Une célèbre famille sommable .....	96
Une célèbre famille non sommable.....	97
Jolie égalité obtenue grâce à une famille sommable de complexes.....	98
<b>Chapitre 3. Suites et séries de fonctions .....</b>	<b>99</b>
CVS, CVU (suite de fonctions).....	99
CVS, CVU, CVU sur tout compact (suite de fonctions).....	100
La limite uniforme de fonctions continues est continue .....	101
Une convergence uniforme impossible .....	102
CVS, CVU (série de fonctions).....	103
Limite en $+\infty$ d'une série de fonction .....	104
Une fonction à moments nuls est nulle .....	105
Une série de fonction à somme $C^1$ .....	106
<b>Chapitre 4. Séries entières .....</b>	<b>107</b>
Calcul de la somme $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$ .....	107
Calcul de la somme $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} x^n$ .....	108
Calcul de la somme $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1} x^n$ .....	109
Une série entière « caractérielle ».....	110
Une série entière lacunaire .....	111
<b>Chapitre 5. Intégrales impropres .....</b>	<b>112</b>
D'où vient le critère de Riemann ? (n°1) .....	112
D'où vient le critère de Riemann ? (n°2) .....	113

## Sommaire

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ .....	114
Fonction gamma d'Euler .....	115
Intégrales de Bertrand .....	116
Une intégrale impropre égale à $\pi$ (n° 1) .....	117
Une intégrale impropre égale à $\pi$ (n° 2) .....	118
Une intégrale impropre égale à $p$ ! .....	119
<b>Chapitre 6. Probabilités</b> .....	<b>120</b>
Probabilité que deux sous-parties soient disjointes .....	120
Fiabilité d'un dépistage .....	121
Le cube peint puis découpé .....	122
<b>Chapitre 7. Variables aléatoires discrètes</b> .....	<b>123</b>
Le problème du collectionneur .....	123
Le double-six .....	124
Le dé à 20 faces et les deux lois .....	125
Les deux lois de Poisson .....	126
Inégalité « à la Tchebychev » .....	127
Le trousseau de clefs .....	128
<b>Chapitre 8. Equations différentielles</b> .....	<b>129</b>
Résolution de $y' - y = 0$ par les séries entières .....	129
Résolution de $y' + y = 0$ par les séries entières .....	130
Résolution de $(x+1)y' + y = 0$ par les séries entières .....	131
Résolution d'un système différentiel par réduction d'une matrice .....	132
Résolution d'un système différentiel sans réduction d'une matrice .....	133
Equation différentielle à variables séparables .....	134
Equation différentielle de Bernoulli .....	135
Equation différentielle d'Euler .....	136
Equation différentielle de Ricatti .....	137
<b>Chapitre 9. Calcul différentiel</b> .....	<b>138</b>
Une fonction continue en $(0,0)$ .....	138
Une fonction continue en $(0,0)$ en utilisant les coordonnées polaires .....	139
Une fonction non continue en $(0,0)$ .....	140
Une fonction non prolongeable par continuité en $(0,0)$ .....	141
Une fonction de classe $C^1$ .....	142
Dérivation en chaîne (n° 1) .....	143
Dérivation en chaîne (n° 2) .....	144
Dérivation en chaîne (n° 3) .....	145
Equations aux dérivées partielles (n° 1) .....	146
Equations aux dérivées partielles (n° 2) .....	147
Minimum d'une fonction à deux variables .....	148
Extrema et points selles d'une fonction à deux variables .....	149
Maximum et point selle d'une fonction à deux variables .....	150

<b>Chapitre 10. Intégrales dépendant d'un paramètre.....</b>	<b>151</b>
Définition de la fonction gamma d'Euler.....	151
Continuité de la fonction gamma d'Euler .....	152
Caractère $C^1$ d'une intégrale à paramètre (n° 1).....	153
Caractère $C^1$ d'une intégrale à paramètre (n° 2).....	154
Continuité par les epsilons d'une intégrale à paramètre .....	155
Transformée de Laplace .....	156

