Chapitre 1

Analyse combinatoire

COURS

1.1 Calculs élémentaires de probabilités et dénombrements

1.1.1 Le problème

Le calcul des probabilités est souvent intuitif. Donnons-en quelques exemples élémentaires, à partir d'une pièce de monnaie et d'un dé non truqués :

1. Quelle est la probabilité d'obtenir **pile** à la suite du lancer de la pièce ?
   Réponse : il y a 1 cas favorable (qui réalise ce que l'on recherche) contre 2 cas possibles (la totalité des résultats). La probabilité est donc $\frac{1}{2}$.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir **le chiffre 2** à la suite du lancer du dé ?
   Réponse : il y a 1 cas favorable contre 6 cas possibles (1, 2, 3, 4, 5 et 6). La probabilité est donc $\frac{1}{6}$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir **un chiffre pair** à la suite du lancer du dé ?
   Réponse : il y a 3 cas favorables (2, 4 et 6) contre 6 cas possibles . La probabilité est donc $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
4. Quelle est la probabilité d'obtenir le **2** et le **pile** en lançant le dé et la pièce ? **Réponse** : ces deux événements n'ont pas de rapport entre eux (on dira qu'ils sont indépendants). La probabilité est égale à $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

La méthode qui semble se dégager des 3 premiers exemples est la suivante :

$$\text{Probabilité} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} \tag{1.1}$$

Le dernier exemple exploite intuitivement que la probabilité de deux événements **indépendants** est égale à leur **produit**.

Tout cela paraît simple. Donnons quelques exemples supplémentaires plus douteux.

1. Quelle est la probabilité qu'il pleuve un jour donné ? Le raisonnement pourrait être le suivant : ou bien il pleut, ou bien il ne pleut pas : il y a donc 1 cas favorable (il pleut) pour 2 cas possibles (il pleut, il ne pleut pas).

   La probabilité qu'il pleuve un jour donné est donc égale à $\frac{1}{2}$.
2. On participe à un concours : ou bien on gagne, ou bien on ne gagne pas. La probabilité de gagner est là encore égale à $\frac{1}{2}$.

On perçoit bien sur ces 2 exemples qu'il y a une anomalie. On pourrait multiplier les exemples car un événement, quel qu'il soit, se produit ou ne se produit pas. Dans ces conditions, la probabilité qu'un événement quelconque se produise serait toujours égale à $\frac{1}{2}$, et un cours sur les probabilités serait donc parfaitement inutile.

Il y a en fait une différence majeure entre les 3 premiers exemples, conduisant à un résultat correct

$$\text{Probabilité} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}},$$

et les 2 derniers pour lesquels ce raisonnement est clairement faux.

La différence est à chercher dans **l'équiprobabilité**. Cette condition est indispensable pour appliquer la formule (1.1) rappelée ci-dessus.

1.1.2 Équiprobabilité et dénombrement

On dit que des éventualités (pile, face etc.) sont **équiprobables** si elles se produisent **statistiquement** avec la même fréquence.

Autrement dit, l'équiprobabilité est une notion expérimentale. Dans le cas d'une pièce de monnaie **non truquée**, on peut vérifier l'équiprobabilité des 2 éventualités en lançant par exemple 1 milliard de fois la pièce (comme il faut une certaine patience, on se contentera d'imaginer le processus) : au terme de ces lancers, on pourra vérifier que le nombre de "pile" est sensiblement le même que le nombre de "face". Il y a donc équiprobabilité.

En revanche, si on joue à un concours un très grand nombre de fois (mais, peut-être pas un milliard de fois...), on imagine bien que le nombre de fois où l'on aura gagné n'est pas du même ordre de grandeur que celui où l'on aura perdu.

Résumons Lorsque l'on veut appliquer la "formule magique"

$$\text{probabilité} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}},$$

il faut qu'il y ait équiprobabilité au sens défini ci-dessus.

Dans ce cas (**et seulement dans ce cas**), le calcul des probabilités se ramène donc à du dénombrement.

Nous allons maintenant étudier certaines formules permettant ce **dénombrement**, en gardant constamment à l'esprit que dès qu'il n'y a pas équiprobabilité, ces formules ne servent plus à rien (et sont même une source d'erreurs de raisonnement).

1.2 Formules de l'analyse combinatoire

Dans cette partie du cours, nous bannissons délibérément le langage des applications, bijections, injections etc. très utile pour la rigueur mathématique, mais hors de propos pour l'étudiant en médecine auquel il n'apporte rien (sauf peut-être une vie plus compliquée).

Dans ce paragraphe, nous raisonnons sur un ensemble E fini contenant n éléments. Les sous-ensembles (ou parties) de E contiennent un nombre p d'éléments (variant de 0 à n).

1.2.1 Factorielle

Par définition (lire “factorielle n”) :

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)(n-3)...4.3.2.1} \tag{1.2}$$

Par exemple :

$$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

On remarque que c'est un nombre qui devient rapidement gigantesque (essayez de calculer 1000 !)

1.2.2 Permutations

Soit un ensemble E à n éléments supposés distincts deux à deux. Une permutation est un classement ordonné de ces n éléments (le mathématicien parlera d'une bijection de E sur lui-même).

Nombre de permutations

Soit P_n ce nombre : pour classer ces n éléments, on choisit le premier (n choix possibles), puis le deuxième (n-1) choix possibles, puis le suivant jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un. Donc :

$$P_n = n(n-1)(n-2)3.2.1$$

soit

$$\boxed{P_n = n\,!} \tag{1.3}$$

Remarques

$1! = 1$

Et par convention : $0! = 1$

1.2.3 Arrangements

Soit p⩽n.

On envisage tous les classements ordonnés possibles de p éléments choisis au hasard parmi les n éléments de E (**sans répétition**).

Nombre d'arrangements de p éléments parmi n

On a n choix possibles pour le premier (on se "sert" dans E).
On a $(n-1)$ choix possibles pour le deuxième (le premier est déjà pris et il n'y a pas de répétition possible : tirage sans remise).
Et on procède ainsi jusqu'à avoir choisi p éléments.
Soit A_n^p ce nombre : on a donc

$$\boxed{A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}} \tag{1.4}$$

Pour calculer **simplement et rapidement** ces nombres, il faut garder présent à l'esprit que l'on doit écrire exactement p nombres au numérateur (pas question de calculer $(n-p+1)$). Ainsi,

$$A_9^3 = 9.8.7$$

On "démarre" de 9 (n dans l cas général), et on décrémente d'une unité jusqu'à avoir écrit 3 chiffres (p dans le cas général).
On peut bien sûr vérifier (mais c'est du temps inutilement perdu) que le dernier chiffre est $n-p+1 = 9-3+1 = 7$.

Remarque

On a bien sûr

$$P_n = A_n^n = n!$$

1.2.4 p-listes

C'est au départ le même principe que les arrangements, sauf que l'on s'autorise des répétitions (les **p-listes** sont d'ailleurs aussi appelées **arrangements avec répétition**).
Comme il y a n choix pour le premier, n choix pour le deuxième, n choix pour le troisième et ainsi jusqu'au $\mathrm{p}^{\text{ième}}$, Le nombre de p-listes est dès lors égal à (nous ne lui attribuons pas de symbole particulier)

$$\boxed{n^p} \tag{1.5}$$

Remarque : comme les répétitions sont possibles (tirages avec remise), il est possible d'avoir p<n.

1.2.5 Combinaisons

Supposons à nouveau que p⩽n.

Une combinaison de p éléments choisis parmi n est une partie à p éléments (**non ordonnés**) issue de l'ensemble E à n éléments.

Nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n

On peut démontrer que ce nombre, noté C_n^p est égal à :

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}} \tag{1.6}$$

Remarque importante

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}} \tag{1.7}$$

Cette formule est plus rapide d'application que la précédente (voir exercices ci-dessous).

Quelques résultats utiles

$$C_n^p = C_n^{n-p} \qquad C_n^n = C_n^0 = 1 \qquad C_n^1 = C_n^{n-1} = n \tag{1.8}$$

1.2.6 Pour conclure

Le calcul des probabilités par le dénombrement suppose l'équiprobabilité. Cette situation est rare dans les situations physiologiques.

On peut donc dire que cette méthodologie servira très peu dans les situations médicales ou paramédicales.

Mais elle est indispensable pour passer le concours (et c'est ce qui nous intéresse ici !)

1.3 Rappels sur les ensembles

Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles (parties) de E.

1.3.1 Définitions

1. **Ensemble vide** : c'est l'ensemble Ø ne contenant aucun élément.
2. **Union** : $A \cup B = \{x \in E \quad \text{tels que} \quad x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\}$
3. **Intersection** : $A \cap B = \{x \in E \quad \text{tels que} \quad x \in A \quad \text{et} \quad x \in B\}$
4. **Complémentaire** : $C_E^A = \{x \in E \quad \text{tels que } x \notin A\}$
   Dans la suite de ce cours, nous noterons $\overline{A}$ ce dernier ensemble (langage des probabilités), plus simple d'écriture.

1.3.2 Propriétés

On démontre les résultats suivants, admis sans démonstration :

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. $\overline{\overline{A}} = A$
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

1.4 Calculs sur les cardinaux

1.4.1 Définition

On appelle cardinal d'un ensemble **fini** le nombre de ses éléments. Donc, si $\mathrm{E} = \{\mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_2, ...\mathrm{a}_n\}$, on a $\mathrm{Card}\,\mathrm{E} = \mathrm{n}$.

1.4.2 Théorème

Soit alors deux sous-ensembles (parties) de E. On peut démontrer aisément (et nous invitons le lecteur à l'admettre, la démonstration ne présentant pour le concours que peu d'intérêt) la formule suivante :

$$\boxed{\mathrm{Card}\,A \cup B = \mathrm{Card}\,A + \mathrm{Card}\,B - \mathrm{Card}\,A \cap B} \tag{1.9}$$

EXERCICES

1.5 Questions à choix multiples

QCM 1

Combien d'anagrammes du mot latex peut-on former ?

(Rappelons qu'une anagramme est une permutation des lettres conduisant à un mot différent, sans se préoccuper du sens du "mot" ainsi obtenu : ainsi, xelat est une anagramme de latex).

A) $5!$
B) 5^5
C) A_5^5
D) 120
E) C_5^5

QCM 2

Calculer C_{20}^{18}

A) 47,5
B) 380
C) 190
D) 1800
E) Aucun des résultats ci-dessus.

QCM 3

20 chevaux participent à une course. Combien y a-t-il de tiercés dans le désordre ?

A) $3!$
B) A_{20}^3
C) C_{20}^3
D) 3^{20}
E) 1140.

QCM 4

20 chevaux participent à une course. Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre ?

A) $3!$

B) A_{20}^3
C) C_{20}^3
D) 3^{20}
E) 1140.

QCM 5

On considère un jeu de 52 cartes composé de 13 cartes de chacune des “couleurs” (c’est-à-dire trèfle , carreau, coeur et pique, et non rouge ou noir).

Insistons pour ceux qui ne sont pas familiers des jeux de cartes. On a 13 cartes à “pique” : As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8,...3, 2 (et la même chose à coeur, carreau et trèfle).

Une “main” au poker est obtenue avec 5 cartes choisies parmi ces 52 cartes. Le nombre des mains est égal à :

A) $5!$
B) C_{52}^5
C) A_{52}^5
D) 52^5
E) C_{52}^{47}

QCM 6

Au poker, un “brelan” est la donnée de 3 cartes de même niveau (mais pas 4 qui constituent un carré), c’est-à-dire 3 As, 3 Rois etc.

Le nombre de mains comportant un brelan est égal à :

A) $3!$
B) C_{52}^3
C) $52\,.\,24\,.\,47$
D) $52\,.\,48\,.\,47$
E) $C_{48}^2\,.\,4\,.\,13$

QCM 7

Toujours au poker, combien y a-t-il de mains comportant au moins un Roi ?

A) $C_{52}^5 - C_{48}^5$
B) $4\,.\,C_{51}^4$
C) C_{48}^5
D) 48^5
E) Aucun de ces résulats.

QCM 8

Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires. On tire