Chapitre 1

Mécanique fondamentale

COURS

Ce cours a pour objet de donner aux étudiants en PAES les outils indispensables à la réussite de leurs concours. Nous avons donc privilégié systématiquement l'aspect pratique des problèmes, laissant de côté tout ce qui pouvait sembler inutilement théorique pour le but à atteindre.

1.1 Calcul vectoriel

Beaucoup d'erreurs aux concours sont dues à une maîtrise insuffisante de ses diverses techniques. Nous rappelons donc ici brièvement ce qui nous parait essentiel. Ceux qui pensent n'en avoir pas besoin peuvent donc sauter cette section.

1.1.1 Coordonnées d'un vecteur. Mesure algébrique

Soit $\vec{V}$ est un vecteur du plan : Le vecteur $\vec{V}$ peut se décomposer suivant les vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de la façon suivante :

$$\vec{V} \ = \ x\,\vec{i} \ + \ y\,\vec{j}\ , \tag{1.1}$$

où x et y sont les coordonnées du vecteur $\vec{V}$ dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Ces coordonnées portent d'autres noms, encore souvent employés aujourd'hui, et dont le sens n'est pas toujours très clair pour les étudiants. Ainsi, la coordonnée x est aussi appelée *mesure algébrique* ou même *projection* du vecteur $\vec{V}$ sur l'axe $(x'x)$ et notée $\overline{V}_x$, (ou V_x) ou même plus simplement $\overline{V}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la direction choisie.

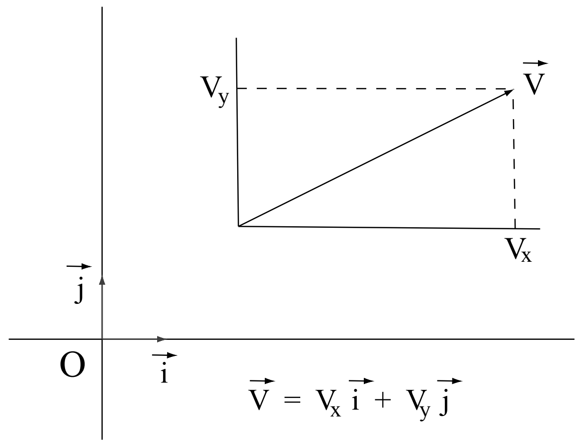


FIG. 1.1 – Coordonnées d'un vecteur relativement à une base

Soulignons ce point important de vocabulaire que nous emploierons souvent : *projeter* un vecteur sur un axe, c'est donc rechercher sa coordonnée (ou sa mesure algébrique) sur cet axe.

1.1.2 Produit scalaire. Norme d'un vecteur

Produit scalaire de deux vecteurs

Le repère du plan est orthonormal. Soit alors deux vecteurs de ce plan

$$\vec{V} \;=\; x\,\vec{i} \;+\; y\,\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \vec{V'} \;=\; x'\vec{i} \;+\; y'\vec{j}\;. \tag{1.2}$$

Leur produit scalaire a pour expression **analytique** (*c'est-à-dire dépendant des coordonnées*) :

$$\vec{V}\cdot\vec{V'} \;=\; x\,x' + y\,y'\;. \tag{1.3}$$

Rappelons que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Le *carré scalaire* est un cas particulier : c'est aussi le carré de la norme du vecteur. On obtient ainsi :

$$\vec{V}\cdot\vec{V} \;=\; \|\vec{V}\|^2 \;=\; x^2 \;+\; y^2\;, \tag{1.4}$$

où $\|\vec{V}\|$ est la norme du vecteur $\vec{V}$ (c'est-à-dire l'intensité du vecteur qu'il représente en physique). On la note souvent plus simplement V, dans un souci d'allègement d'écriture.

Formule intrinsèque du produit scalaire (c'est-à-dire ne dépendant pas des coordonnées) :

$$\vec{V}\cdot\vec{V'} \;=\; \|\vec{V}\|\,\|\vec{V'}\|\,\cos(\vec{V},\;\vec{V'})\;. \tag{1.5}$$

Le produit scalaire nous sera utile pour l'étude du *travail* et de la *puissance* d'une force en physique.

Projection de quelques vecteurs

Dans les exemples proposés ci-dessous, nous donnons, à titre d'illustration, les projections de divers vecteurs suivant les axes $(x'x)$ et $(y'y)$.

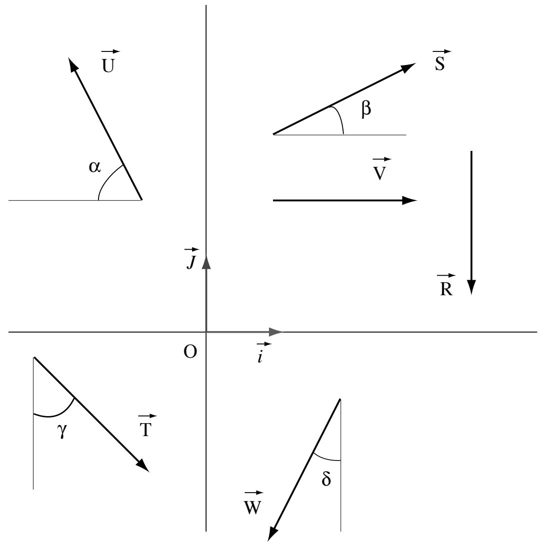


FIG. 1.2 – Projection de quelques vecteurs. *Petit moyen mnémotechnique pour choisir entre* cos *et* sin : si l'on balaie l'angle qui va du vecteur à sa projection, c'est la fonction cosinus qui intervient.

Les résultats relatifs à ces six vecteurs sont les suivants :

$$\vec{U}\left(\ \|\vec{U}\|\cos\alpha\ ,\ \|\vec{U}\|\sin\alpha\ \right) \tag{1.6}$$

$$\vec{S}\left(\ \|\vec{S}\|\cos\beta\ ,\ \|\vec{S}\|\sin\beta\ \right) \tag{1.7}$$

$$\vec{T}\left(\ \|\vec{T}\|\sin\gamma\ ,\ -\|\vec{T}\|\cos\gamma\ \right) \tag{1.8}$$

$$\vec{W}\left(\ -\|\vec{W}\|\sin\delta\ ,\ -\|\vec{W}\|\cos\delta\ \right) \tag{1.9}$$

$$\vec{V}\left(\ \|\vec{V}\|\ ,\ 0\ \right) \tag{1.10}$$

$$\vec{R}\left(\ 0\ ,\ -\|\vec{R}\|\ \right) \tag{1.11}$$

Remarque pour ceux qui aiment les maths : on a, par exemple :

$$U_x \ = \ \vec{U}.\vec{i} \ = \ \|\vec{U}\|\cos\alpha \tag{1.12}$$

1.2 Cinématique du point

1.2.1 Vecteur espace. Équations horaires

Le point mobile M décrit une courbe du plan au cours du temps (cette courbe est la *trajectoire* du point M). Les coordonnées de M sont donc variables en fonction du temps. Le vecteur $\vec{OM}$ est appelé le vecteur-espace du point mobile M et l'on peut écrire :

$$\vec{OM}\ \begin{cases} x \ = \ f(t) \\ y \ = \ g(t). \end{cases} \tag{1.13}$$

Ces équations algébriques, qui constituent les projections du vecteur $\vec{OM}$ sur les axes, s'appellent **équations horaires** du mouvement. Nous verrons dans la section 3 qu'on les obtient par intégration à partir du principe fondamental de la dynamique.

1.2.2 Vecteur vitesse. Vecteur accélération

Rappelons quelques résultats élémentaires de l'enseignement secondaire :

Vecteur vitesse

C'est le vecteur $\vec{v}$ obtenu par dérivation du vecteur espace. On a donc :

$$\vec{v} \; = \; \frac{d\vec{OM}}{dt} \; . \tag{1.14}$$

Ce vecteur est toujours tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement.

Vecteur accélération

C'est le vecteur $\vec{a}$ obtenu par dérivation du vecteur vitesse, c'est-à-dire :

$$\vec{a} \; = \; \frac{d\vec{v}}{dt} \; = \; \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \; . \tag{1.15}$$

cette dernière expression représentant la dérivée seconde du vecteur espace par rapport au temps. Le vecteur accélération n'est jamais dirigé vers l'extérieur de la courbe (voir figure 4).

Nous allons maintenant rappeler les résultats concernant quelques cas particuliers fondamentaux.

1.2.3 Etude de quelques mouvements particuliers

A) Définitions

1. Mouvement rectiligne : la trajectoire du mobile est incluse dans une droite.
2. Mouvement circulaire : la trajectoire du mobile est incluse dans un cercle.
3. Mouvement curviligne : la trajectoire du mobile est une courbe *a priori* quelconque.
4. Mouvement uniforme : la vitesse (comprenez sa norme) du mobile est constante
5. Mouvement uniformément varié : l'accélération tangentielle (voir cette définition ci-dessous) est une constante non nulle

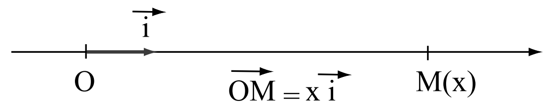
B) Mouvement rectiligne uniforme

La trajectoire rectiligne du mouvement est orientée en un axe $(x'x)$ d'origine O et de vecteur de base $\vec{i}$. Le vecteur espace n'a donc qu'une coordonnée x. L'unique équation horaire du mouvement est alors du type

$$\boxed{x \; = \; vt \; + \; x_0} \tag{1.16}$$

où v est la vitesse du mobile et x_0 son abscisse à l'instant origine $t \; = \; 0$.

Fig. 1.3 – Mouvement rectiligne d'un point mobile : Cette figure vaut pour cette section et la suivante



C) Mouvement rectiligne uniformément varié

La trajectoire rectiligne du mouvement est orientée en un axe $(x'x)$ d'origine O et de vecteur de base $\vec{i}$. Le vecteur espace n'a donc qu'une coordonnée x. L'unique équation horaire du mouvement est alors du type

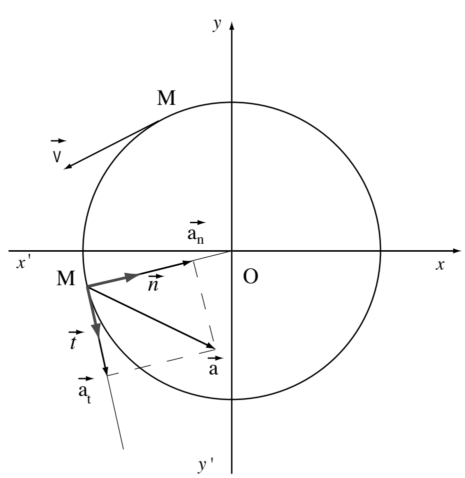
$$\boxed{x = \frac{1}{2}\, at^2 + v_0 t + x_0} \tag{1.17}$$

où a est l'accélération (supposée constante) du mobile, v_0 sa vitesse initiale et x_0 son abscisse initiale (à $t = 0$).

D) Mouvement circulaire

On ne s'intéressera pas ici aux équations horaires du mouvement (bien que cela soit possible, mais peu utile pour ce qui vous concerne), mais surtout à la forme générale du vecteur accélération, et notamment à ses deux coordonnées dans la base de Frenet $\{\vec{t}, \vec{n}\}$ (voir figure).

Fig. 1.4 – Mouvement circulaire d'un point mobile : on remarque que l'accélération normale est toujours **centripète** donc que le vecteur accélération est toujours dirigé vers l'intérieur de la courbe.



Ces coordonnées sont respectivement l'**accélération tangentielle** et l'**accélération normale**. On démontre qu'elles ont pour valeurs algébriques :

$$\vec{a} \begin{cases} a_t &= \frac{dv}{dt} \\ \\ a_n &= (\frac{v^2}{r}) \ , \end{cases} \tag{1.18}$$

où v est la vitesse du mobile et r le rayon du cercle qu'il décrit.

Cas particulier du mouvement circulaire uniforme : dans ce cas,

$$v \ = \ \text{constante}$$

et l'on a :

$$a_t \ = \ \frac{dv}{dt} \ = \ 0 \ , \tag{1.19}$$

et donc, $a = a_n$: par conséquent, l'accélération est réduite à sa composante **centripète**.

Remarque importante : il est faux de croire qu'un mouvement uniforme est un mouvement sans accélération : en réalité, son accélération *tangentielle* est nulle puisque v est une constante et donc

$$a_t \ = \ \frac{dv}{dt} \ = \ 0 \ ,$$

mais il reste l'*accélération normale*

$$a_n \ = \ \frac{v^2}{r} \ ,$$

qui n'est nulle que si $v \ = \ 0$ (mais alors il n'y a plus de mouvement) ou dans le cas d'une trajectoire **rectiligne** pour laquelle on considère que r devient infini.

E) Mouvement rectiligne sinusoïdal

La trajectoire rectiligne du mouvement est orientée en un axe $(x'x)$ d'origine O et de vecteur de base $\vec{i}$. Le vecteur espace n'a donc qu'une coordonnée x. L'unique équation horaire du mouvement est alors du type

$$x \ = \ a \cos(\omega t \ + \ \varphi) \ , \tag{1.20}$$

où a est *l'amplitude* du mouvement, ω sa *pulsation* et φ sa *phase* à l'origine. Expliquons ces derniers termes :

du fait que l'on a toujours

$$-1 \ \leq \ (\sin \quad \text{ou} \ \ cos) \leq \ 1 \ , \tag{1.21}$$

on déduit immédiatement que

$$-a \ \leq \ x \ \leq \ a \ ; \tag{1.22}$$

l'*amplitude* a est donc la valeur maximum atteinte par l'*élongation* x.

La *pulsation* ω, qui s'exprime en radians par seconde (rad.s^{-1}) est reliée à la période T et à la fréqence f par les formules suivantes :

$$T \ = \ \frac{2\pi}{\omega} \ \ \text{et} \quad \omega \ = \ 2\pi f \ . \tag{1.23}$$

1.3 Dynamique

On se limitera à un système solide en translation, c'est-à-dire :

1. soit un système assimilable à un point matériel
2. soit un système solide ayant un volume non négligeable mais tel que la droite passant par deux points **quelconques** de ce solide conserve une direction constante au cours du mouvement.

1.3.1 Quantité de mouvement

Point matériel

Soit un point matériel M de masse m et animé de la vitesse $\vec{v}$. Par définition, sa quantité de mouvement est le vecteur

$$\boxed{\vec{p} \;=\; m\,\vec{v}\;.} \tag{1.24}$$

Ensemble de points matériels

Soit alors un ensemble de points matériels M_1, M_2, ... M_n de masses respectives $m_1, m_2, ...m_n$, animés des vitesses $\vec{v_1}\,, \vec{v_2}\,, ...\vec{v_n}$. Par définition, la quantité de mouvement du système de points matériels est la somme vectorielle des quantités de mouvement de tous les points du système, c'est-à-dire que l'on a :

$$\vec{p} \;= \sum_{i=1}^{n} \vec{p_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i.\vec{v_i} \tag{1.25}$$

où $\vec{p_i}$ est le vecteur quantité de mouvement du point M_i.

Solide matériel en translation

Par définition, la quantité de mouvement de ce système est le vecteur

$$\vec{p} \;=\; m\,\vec{v}_G, \tag{1.26}$$

où $\vec{v}_G$ est le vecteur vitesse du centre d'inertie du système solide. Dans ces conditions restrictives, on a le principe suivant (en réalité, ce principe reste valable dans des conditions plus larges (système en rotation, système non solide par exemple) qui n'intéressent pas l'étudiant en PAES) :

1.3.2 Principe fondamental de la dynamique

Énoncé

Il existe une catégorie de référentiels "privilégiés" par rapport auxquels on peut appliquer la relation suivante :

$$\boxed{\sum \vec{F} \;=\; \frac{d\vec{p}}{dt}} \tag{1.27}$$

où $\sum \vec{F}$ représente la somme de **toutes** les forces appliquées au système étudié, et $\vec{p}$ la quantité de mouvement totale du système.

Nous supposerons dans la suite que la masse totale du système reste constante quelle que soit la vitesse de son centre d'inertie (ce qui n'est pas rigoureusement le cas, mais peut être considéré comme vrai jusqu'à des vitesses de l'ordre de 30 000 km.s^{-1} ! La relation $\vec{p} = m\,\vec{v}$ conduit immédiatement à

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\frac{\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a}\ , \tag{1.28}$$

(ou a_G si l'on a affaire à un système solide).

1. cas d'un système assimilable à un point matériel :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}\ . \tag{1.29}$$

2. cas d'un système plus général en translation :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G\ , \tag{1.30}$$

   où $\vec{a}_G$ est l'accélération du centre d'inertie du centre G du solide en translation.

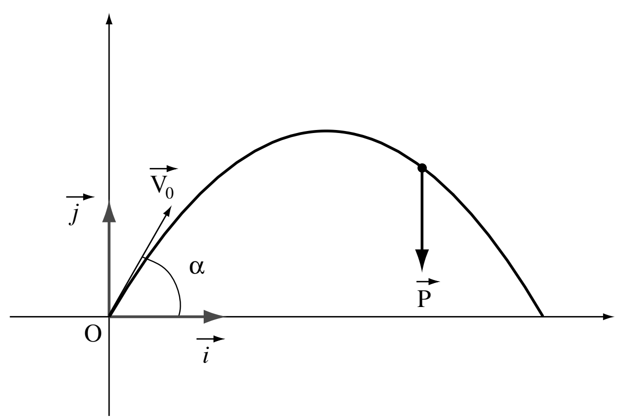
De tels référentiels sont dits galiléens. Les équations 1.29 et 1.30 sont des équations différentielles vectorielles du second ordre dont la résolution conduit aux équations horaires du mouvement.

En fait, d'un point de vue pratique, on projette ces équations sur les axes du mouvements ce qui conduit à autant d'équations différentielles algébriques qu'il y a d'axes de projection.

Exemple d'application

Nous allons illustrer tout ceci à l'aide d'un exemple classique mais néanmoins fondamental : **la chute libre d'un corps**.

FIG. 1.5 – **Mouvement de chute libre** : un mouvement de chute libre est un mouvement dans lequel n'interviennent que les forces de gravitation.



Un point matériel (qui peut être une balle de golf, par exemple) est émis d'un point O, à un instant pris pour instant initial avec une vitesse initiale $\vec{V_o}$ faisant un angle α avec l'horizontale. On se propose d'en étudier le mouvement.

Pour ce type de mouvement, localisé au *voisinage* de la surface terrestre, nous prendrons pour référentiel, *supposé galiléen*, le référentiel terrestre, et nous y appliquerons le principe fondamental de la dynamique :