Chapitre 1.
Second degré

1. Comment mettre sous forme canonique le trinôme $ax^2 + bx + c$?

Coach : La mise sous forme canonique consiste à écrire ax^2+bx+c sous la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$. C'est une forme assez pratique pour tracer une courbe ou résoudre une équation.

Méthode

Pour mettre ax^2+bx+c sous forme canonique :
Etape 1 : on factorise ax^2+bx+c par a (si $a\neq 1$).
Etape 2 : on essaie de faire apparaître l'une des deux identités remarquables $(m+p)^2=m^2+2mp+p^2$ ou $(m-p)^2=m^2-2mp+p^2$.

Exemples (force 2)

Ex. 1. *Mettre sous forme canonique le trinôme* x^2+3x+5.

$$x^2+3x+5=x^2+3x+\underbrace{\frac{9}{4}-\frac{9}{4}}_{0}+5=\underbrace{x^2+3x+\frac{9}{4}}_{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{9}{4}+5=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{20}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$$

Coach : x^2+3x+5 ressemble à $x^2+3x+\frac{9}{4}$ (car $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$) soit $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$.

Ex. 2. *Mettre sous forme canonique le trinôme* x^2-x-4.

$$x^2-x-4=x^2-x+\underbrace{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}_{0}-4=\underbrace{x^2-x+\frac{1}{4}}_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{4}-4=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{16}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$$

Ex. 3. *Mettre sous forme canonique le trinôme* $-2x^2+10x-6$.

Etape 1 : on a : $-2x^2+10x-6=-2\left(x^2-5x+3\right)$.

> **Coach** : x^2-5x+3 ressemble à $x^2-5x+\frac{25}{4}$ (car $\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$) (soit $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$).

Etape 2 : $-2x^2+10x-6=-2\left(x^2-5x+3\right)=2\left(x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+3\right)$

$$=-2\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+\frac{12}{4}\right)=-2\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}\right)=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{13}{2}.$$

EXERCICES-TESTS

> **Coach** : Avant de te lancer, révise bien des identités remarquables à savoir :
> $(m+p)^2=m^2+2mp+p^2$ et $(m-p)^2=m^2-2mp+p^2$.

Exercices-Tests (force 2)

ET1. *Mettre sous forme canonique : a)* x^2+x+1 *b)* x^2+2x *c)* x^2-3x-2
d) x^2+4x-5 *e)* $x^2+10x-1$.

ET2. *Mettre sous forme canonique : a)* $2x^2+8x+6$ *b)* $4x^2-24x+20$
c) $-2x^2+6x+5$ *d)* $\frac{1}{2}x^2+12x-2$.

ET3. *Mettre sous forme canonique le trinôme* ax^2+bx+c *(avec* $a\neq 0$ *).*

2. Comment tracer la courbe y = ax² + bx + c ?

> **Coach** : Une parabole est une courbe magnifique qui était déjà connue des Grecs : Archimède les utilisait comme arme de guerre (les miroirs ardents). Je vais te montrer comment les tracer, regarde !

Méthode

Pour tracer la parabole $y=ax^2+bx+c$,

1) On calcule $\frac{-b}{2a}$ (abscisse du sommet).

2) On utilise le tableau de valeurs suivant (centré en $\frac{-b}{2a}$). Autour du centre, on fait $+0{,}5$, $+0{,}5$ puis $+1$, et $+1$ (pareil à gauche avec $-0{,}5$, $-0{,}5$ puis -1, et -1).

$\underleftarrow{-1}$ $\underleftarrow{-1}$ $\underleftarrow{-0,5}$ $\underleftarrow{-0,5}$ $\underrightarrow{+0,5}$ $\underrightarrow{+0,5}$ $\underrightarrow{+1}$ $\underrightarrow{+1}$

x				$\mathbf{\frac{-b}{2a}}$				
$y = ax^2 + bx + c$								

3) On complète les valeurs du tableau de la 2^{e} ligne avec la fonction table de la calculatrice.
4) On reporte les points du tableau de valeurs obtenu.

Exemple (force 2)

Ex. 1. *Tracer la courbe* $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$.

On a : $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$ d'où : $\frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{0}{1} = \mathbf{0}$ (abscisse du sommet).

On construit notre tableau de valeurs centré en **0** (l'abscisse du sommet) :

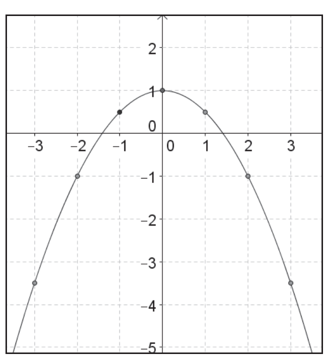
$\underleftarrow{-1}$ $\underleftarrow{-1}$ $\underleftarrow{-0,5}$ $\underleftarrow{-0,5}$ $\underrightarrow{+0,5}$ $\underrightarrow{+0,5}$ $\underrightarrow{+1}$ $\underrightarrow{+1}$

x	–3	–2	–1	–0,5	**0**	0,5	1	2	3
$y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$									

Maintenant on le complète avec la calculatrice et l'instruction « table » qu'on paramètre ainsi : Début table : -3 , pas table : 0,5 (et fin table : 3 (si c'est demandé)).

x	–3	–2	–1	–0,5	**0**	0,5	1	2	3
$y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$	–3,5	–1	0,5	0,75	1	0,75	0,5	–1	–3,5

Ce qui donne (une fois les points placés et reliés harmonieusement) :



EXERCICE-TEST

Exercice-Test (force 2)

ET1. *Tracer la courbe* $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$.

3. Comment retrouver les coefficients a, b et c à partir d'une parabole donnée ?

Coach : Il s'agit de déterminer à quelle fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ correspond la courbe C_f.

Méthode

On cherche des renseignements (au moins 3, car il y a 3 inconnues a, b et c !). On peut en trouver notamment :

1) En regardant l'image de 0, car elle vaudra toujours c (en effet : $a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$).

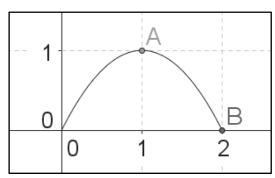
2) En regardant l'abscisse du sommet, toujours égale à $\frac{-b}{2a}$.

3) En cherchant un autre point (x_0, y_0) (bien choisi) se trouvant sur la courbe et qui vérifiera par conséquent l'égalité $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

Avec ces renseignements, on trouve facilement a, b et c en résolvant un système.

Exemple (force 2)

Ex. 1. *La parabole* C_f *tracée ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur* $[0;2]$ *par* $f(x) = ax^2 + bx + c$. *On précise que cette courbe passe par les points* $O(0;0)$, $A(1;1)$ *et* $B(2;0)$.



a) Montrer que $c = 0$.

b) Montrer ensuite que les deux nombres a et b sont solutions du système $\begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$.

c) Calculer a et b.

d) En déduire l'expression de $f(x)$.

Coach : Tu remarqueras que cet exercice est guidé. Suis bien l'ordre des questions et tout se passera bien !

C_f est la courbe d'équation $y = f(x)$, c'est-à-dire $y = ax^2 + bx + c$.

a) Comme C_f passe par $O(0;0)$, on a : $0=a\times 0^2+b\times 0+c$ soit $0=c$.

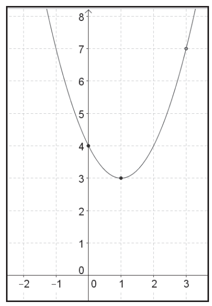
b) Comme C_f passe par $A(1;1)$, on a : $1=a\times 1^2+b\times 1+c$ soit $1=a+b+c$, c'est-à-dire $1=a+b$ puisque $c=0$.

Comme C_f passe par $B(2;0)$, on a : $0=a\times 2^2+b\times 2+c$ soit $0=4a+2b+c$, c'est-à-dire $0=4a+2b$ puisque $c=0$.

c) $\begin{cases}4a+2b=0\\a+b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a+2b=0\\2a+2b=2\end{cases}$ ce qui donne $2a=-2$ soit : $a=\dfrac{-2}{2}=-1$. Comme $a+b=1$ et que $a=-1$, cela nous donne : $-1+b=1$ soit $b=1+1=2$.

d) On a trouvé $a=-1$, $b=2$ et $c=0$. Conclusion : $f(x)=ax^2+bx+c=-x^2+2x$.

Ex. 2. *La parabole ci-dessous est la courbe de la fonction f définie par* $f(x)=ax^2+bx+c$ *(où a, b et c désignent trois nombres réels).*



Déterminer a, b et c puis l'expression algébrique de $f(x)$.

Coach : Cette fois, rien n'est guidé. Regarde bien la méthode !

1) L'image de 0 vaut 4, on a donc $f(0)=4$ soit : $a\times 0^2+b\times 0+c=4$ soit : $c=4$.

2) L'abscisse du sommet vaut 1, par conséquent $\dfrac{-b}{2a}=1$ ce qui donne : $-b=1\times 2a$ (produit en croix) soit : $-b=2a$.

3) La courbe passe par le point de coordonnées $(3,7)$. Par conséquent, $f(3)=7$, ce qui se traduit par l'égalité $a\times 3^2+b\times 3+c=7$ soit : $9a+3b+c=7$.

Coach : Tu as maintenant autant d'équations que d'inconnues. Tu dois résoudre le système.

On a : $\begin{cases}c=4\\b=-2a\\9a+3b+c=7\end{cases}$. En utilisant $\begin{cases}c=4\\b=-2a\end{cases}$ dans la dernière égalité $9a+3b+c=7$, on obtient : $9a+3\times(-2a)+4=7$ soit : $9a-6a+4=7$ soit : $3a+4=7$ soit : $3a=7-4$ soit : $3a=3$ soit : $a=1$. Enfin, comme $b=-2a$, on a : $b=-2a=-2\times 1=-2$.

Coach : Tu sais maintenant que $a=1$, $b=-2$ et $c=4$. Tu n'as plus qu'à remplacer a, b et c pas ces valeurs dans l'expression $f(x)=ax^2+bx+c$.

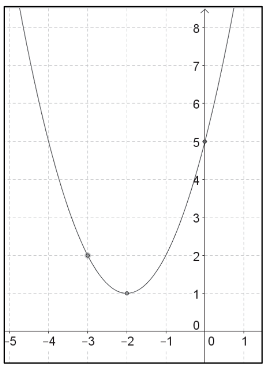
Comme $f(x)=ax^2+bx+c$, on a $f(x)=1\times x^2+(-2)\times x+4$ soit $f(x)=x^2-2x+4$.

EXERCICE-TEST

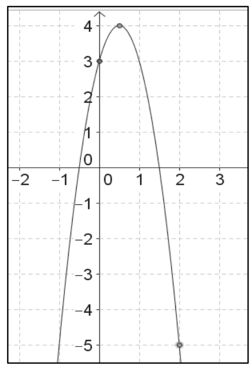
Exercice-Test (force 2)

ET1. *La parabole ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie par* $f(x)=ax^2+bx+c$ *où a, b et c désignent trois nombres réels. Déterminer a, b et c.*

a)



b)



4. Comment étudier les variations de la fonction trinôme $x \to ax^2 + bx + c$?

Coach : Je vais t'apprendre à obtenir le tableau de variations d'une fonction trinôme : il n'y a que deux cas à retenir !

Méthode

1) On calcule $\frac{-b}{2a}$ (abscisse du sommet) pour centrer le tableau de variations.

2) Il y a ensuite deux cas :

Si $a>0$, on a :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$x\to ax^2+bx+c$	$\searrow$		$\nearrow$

Si $a<0$, on a :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$x \to ax^2+bx+c$		↗ ↘	

3) Enfin, on calcule le minimum (ou le maximum suivant les cas) en remplaçant x par $\frac{-b}{2a}$ dans l'expression ax^2+bx+c.

Exemple (force 2)

Ex. 1. *Etudier les variations de la fonction f sur* $[70;160]$ *par* $f(x)=0{,}25x^2-60x-2775$.

On a : $\begin{cases} a=0{,}25 \\ b=-60 \\ c=-2775 \end{cases}$ d'où : $\frac{-b}{2a}=\frac{60}{2\times0{,}25}=\frac{60}{0{,}5}=120$. On « centre » donc le tableau de variations en **120**. Comme $a>0$, on obtient :

x	70	**120**	160
f	–5750 ↘	–6375	↗ –5975

Car $\begin{cases} f(70)=0{,}25\times70^2-60\times70-2775=-5750 \\ f(120)=0{,}25\times120^2-60\times120-2775=-6375 \\ f(160)=0{,}25\times160^2-60\times160-2775=-5975 \end{cases}$.

Ex. 2. *On s'intéresse au ballon de basketball lancé par un joueur faisant face à un panneau. La trajectoire du ballon est assimilée à la courbe* C_f *représentant la fonction f définie sur l'intervalle* $[0;6]$ *par* $f(x)=-0{,}4x^2+2{,}2x+2$. *Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon lors de ce lancer ?*

On a : $\begin{cases} a=-0{,}4 \\ b=2{,}2 \\ c=2 \end{cases}$ d'où : $\frac{-b}{2a}=\frac{-2{,}2}{2\times(-0{,}4)}=\frac{-2{,}2}{-0{,}8}=2{,}75$ (abscisse du sommet). On « centre » donc le tableau de variations en **2,75**.
Comme $a<0$, on obtient :

x	0	**2,75**	6
f	2 ↗	5,025	↘ 0,8

Car $\begin{cases} f(0)=-0{,}4\times 0^2+2{,}2\times 0+2=2 \\ f(2{,}75)=-0{,}4\times(2{,}75)^2+2{,}2\times(2{,}75)+2=5{,}025 \\ f(6)=-0{,}4\times 6^2+2{,}2\times 6+2=0{,}8 \end{cases}$.

Conclusion : la hauteur maximale atteinte par le ballon lors de ce lancer est de 5,025 mètres.

EXERCICES-TESTS

Exercices-Tests (force 2)

ET1. *Etudier les variations de la fonction f sur* $\left[\frac{1}{12};8\right]$ *par* $f(x)=-0{,}7x^2+7{,}7x+45$.

(On arrondira à 10^{-1} *près).*

ET2. *On s'intéresse à une balle de tennis lancée par un joueur. La trajectoire de la balle est assimilée à la courbe* C_f *représentant la fonction f définie sur l'intervalle* $[0;5]$ *par* $f(x)=-0{,}5x^2+2{,}4x+2$. *Quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle ?*

5. Comment résoudre l'équation ax²+bx+c=0 en utilisant la mise sous forme canonique ?

Méthode

Pour résoudre l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$,

1) On met sous forme canonique le trinôme $ax^2+bx+c=0$ (voir paragraphe 1).

2) On utilise la propriété (de 2^de^) suivante : $X^2=a$ équivaut à $\begin{cases} X=\sqrt{a} \\ \text{ou} \\ X=-\sqrt{a} \end{cases}$.

Exemple (force 2)

Ex. 1. *1) Ecrire le trinôme* t^2-t-1 *sous forme canonique.*

2) En déduire les solutions de l'équation $t^2-t-1=0$.

1) On a : $t^2-t-1=t^2-t+\underbrace{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}_{0}-1=\underbrace{t^2-t+\frac{1}{4}}_{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{5}{4}=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$.