Chapitre 1

Second degré

Cours

1 Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux

Définition de la forme canonique

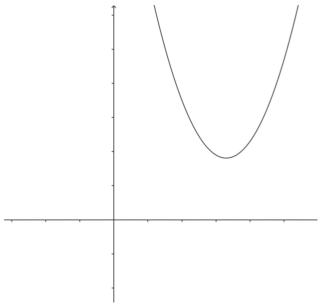
$a(x-\alpha)^2+\beta$ (avec $\alpha=\frac{-b}{2a}$ et $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}$) est appelée forme canonique du polynôme de degré deux ax^2+bx+c .

Propriétés

La forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$ (avec $\alpha=\frac{-b}{2a}$ et $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}$) du polynôme de degré deux ax^2+bx+c permet de savoir que :

1. La courbe $y=ax^2+bx+c$ est une parabole de sommet d'abscisse $\alpha=\frac{-b}{2a}$ et d'ordonnée $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

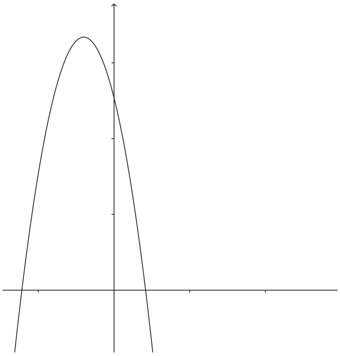
2. Si $a>0$, la courbe $y=ax^2+bx+c$ est dans le « bon sens ».



La fonction $x\rightarrow ax^2+bx+c$ admettant alors pour tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$x\rightarrow ax^2+bx+c$	$\searrow$		$\nearrow$

Si $a<0$, la courbe $y=ax^2+bx+c$ est dans le « mauvais sens ».



La fonction $x \rightarrow ax^2+bx+c$ admettant alors pour tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$x \rightarrow ax^2+bx+c$	↗		↘

Vocabulaire à connaître

Parabole, forme canonique, alpha (lettre α), beta (lettre β), parabole.

2 Équation du second degré, discriminant

Définition du discriminant

Soit $ax^2+bx+c=0$ une équation du second degré. $\Delta=b^2-4ac$ est appelé discriminant de l'équation.

Théorème de résolution d'une équation du second degré par le discriminant

Si $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta=0$, l'équation admet une solution : $x_0=\frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta<0$, l'équation n'admet pas de solution.

Définition des racines du trinôme ax^2+bx+c

x_1 et x_2 (et x_0) sont également appelés racines du trinôme ax^2+bx+c.

Vocabulaire à connaître

Discriminant, solutions, racines, trinôme.

Concept logique

Raisonnement par disjonction de cas.

3 Signe du trinôme

Théorème de factorisation d'un trinôme

Si $\Delta>0$, alors $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Si $\Delta=0$, alors $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$.

Si $\Delta<0$, alors ax^2+bx+c ne peut se factoriser davantage.

Théorème du signe du trinôme

Le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a sauf entre les racines.

On a alors six cas possibles

1. Cas où $\Delta>0$ et $a>0$:

x	$-\infty$					$+\infty$
ax^2+bx+c	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$	

2. Cas où $\Delta>0$ et $a<0$:

x	$-\infty$					$+\infty$
ax^2+bx+c	$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$	

3. Cas où $\Delta=0$ et $a>0$:

x	$-\infty$			$+\infty$
ax^2+bx+c	$+$	ϕ	$+$	

4. Cas où $\Delta=0$ et $a<0$:

x	$-\infty$			$+\infty$
ax^2+bx+c	$-$	ϕ	$-$	

5. Cas où $\Delta < 0$ et $a > 0$:

x	$-\infty$ $+\infty$
ax^2+bx+c	$+$

6. Cas où $\Delta < 0$ et $a < 0$:

x	$-\infty$ $+\infty$
ax^2+bx+c	$-$

Concept logique

Factorisation, disjonction de cas.

Exercices

Compétences attendues

- Déterminer et utiliser la forme la plus adéquate d'une fonction polynôme de degré deux en vue de la résolution d'un problème : développée, factorisée, canonique.

Exercice 1.1

Calculer, appliquer des techniques de calcul, expérimenter à l'aide d'outils logiciels, Raisonner

Soit $f(x)=x^2-4x+3$ (forme développée)

1. Déterminer la forme canonique de $f(x)$. Comparer avec le résultat donné par le logiciel Xcas.
2. Déterminer la forme factorisée de $f(x)$. Comparer avec le résultat donné par le logiciel Xcas.
3. En utilisant la forme la plus adéquate (développée, canonique ou factorisée)
   a. Calculer les images de 0, de 2 et de 3.
   b. Déterminer les antécédents de 3, de 8, et de 0.
   c. Déterminer le minimum de la fonction f.

Exercice 1.2

Calculer, appliquer des techniques de calcul, expérimenter à l'aide d'outils logiciels, Raisonner

Soit $f(x)=2x^2+12x+8$ (forme développée)

1. Déterminer la forme canonique de $f(x)$. Comparer avec le résultat donné par le logiciel Xcas.
2. Déterminer la forme factorisée de $f(x)$. Comparer avec le résultat donné par le logiciel Xcas.
3. En utilisant la forme la plus adéquate (développée, canonique ou factorisée)
   a. Calculer les images de 0, de -3 et de $\sqrt{5}$.
   b. Déterminer les antécédents de -6, de 8, et de 0
   c. Déterminer le minimum de la fonction f.

Exercice 1.3

Expérimenter à l'aide d'outils logiciels, Représenter, choisir un cadre graphique, changer de registre, choisir un cadre algébrique, Calculer

a. Écrire un algorithme (sous Python), qui cherche les solutions entières comprises entre -1000 et 1000 de l'équation $x^2-8x+17=-x^2+4x+1$. Que peut-on conjecturer ?

b. Tracer les courbes $y=x^2-8x+17$ et $y=-x^2+4x+1$ dans un même repère. Que peut-on conjecturer ?

c. En remarquant que $x^2-8x+17=-x^2+4x+1 \Leftrightarrow 2x^2-12x+16=0$, résoudre algébriquement l'équation $x^2-8x+17=-x^2+4x+1$.

Exercice 1.4

Chercher, expérimenter à l'aide d'outils logiciels, Choisir un cadre, Calculer

a. À l'aide de Geogebra et de la courbe $y=x^2$ qu'on déplacera avec la souris, déterminer un polynôme du second degré dont les racines sont 2 et 6.

b. Retrouver algébriquement ce résultat en utilisant une forme factorisée ou une forme développée (au choix).

Exercice 1.5

Raisonner, Choisir un cadre algébrique, Changer de registre

- Déterminer un polynôme du second degré dont les racines ont pour somme 7 et produit 12. Déterminer alors ces deux racines.

Exercice 1.6

Chercher, expérimenter à l'aide d'outils logiciels, Choisir un cadre, Calculer

a. À l'aide de Geogebra et de la courbe $y=x^2$ qu'on déplacera avec la souris, déterminer un polynôme du second degré qui admet pour minimum 3 (atteint pour $x=4$).

b. Retrouver algébriquement ce résultat en utilisant une forme canonique.

Exercice 1.7

Chercher, expérimenter à l'aide d'outils logiciels, Choisir un cadre, Calculer

a. À l'aide de Geogebra et de la courbe $y=-x^2$ qu'on déplacera avec la souris, déterminer un polynôme du second degré qui admet pour maximum 7 (atteint pour $x=2$).

b. Retrouver algébriquement ce résultat en utilisant une forme canonique.

Exercice 1.8

Chercher, expérimenter à l'aide d'outils logiciels, Valider ou invalider un modèle, Raisonner, Calculer, Communiquer un résultat par oral

1. À l'aide du logiciel Geogebra, compléter le tableau suivant concernant les polygones réguliers :

	Carré	Pentagone	Hexagone	Heptagone	Octogone
Nombre de côtés	4	5	6	7	8
Nombre de diagonales	2				

2. À l'aide du tableau précédent, validez-vous la proposition de François, qui pense qu'un polygone à x côté possède $\frac{x\times(x-3)}{2}$ diagonales ? Comment expliqueriez-vous oralement sa démarche lui permettant la découverte de cette formule ?

3. En admettant le résultat de François :
   a. Déterminer le nombre de diagonales d'un décagone régulier (10 côtés).
   b. Quel est le nombre de côtés d'un polygone régulier admettant 377 diagonales ? Construire un tel polygone avec le logiciel Geogebra.

Exercice 1.9

Chercher, Raisonner, Calculer, appliquer des techniques

a. Déterminer la valeur a pour laquelle x^2+ax+3 admet -1 pour racine.

b. Déterminer alors l'autre racine de x^2+ax+3 (pour la valeur de a trouvée).

c. Déterminer enfin le minimum de x^2+ax+3 (toujours pour la valeur de a trouvée).