Chapitre 1

METHODES DU SECOND DEGRE

En maths, on résout des équations, pas pour le plaisir mais parce que c'est utile et on ne les résout pas n'importe comment. En 2nde, vous avez rencontré le cas le plus simple d'équation, celles du 1er degré, par exemple $2x-3=0$. Vous avez même rencontré des cas très simples d'équations du 2nd degré, comme $x^2=3$ ou $(2x-3)(x+1)=0$. Mais en réalité les équations du 2nd degré sont beaucoup plus générales, comme par exemple l'équation $x^2-3x+6=0$. Sans méthode on ne voit pas comment la résoudre. L'objet de ce chapitre est justement de vous donner les méthodes pour y parvenir.
Mais l'objet de ce chapitre est également de vous donner les méthodes pour étudier tous les autres problèmes relatifs au 2nd degré : tracé graphique des paraboles, propriétés des solutions ou des racines, tableaux de signes, inéquations, factorisations, problèmes ou situations menant au 2nd degré... Vous êtes prêt ? Alors allons-y !

1. Mise sous forme canonique

La mise sous forme canonique (c'est-à-dire la mise sous la forme $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$) date d'il y a longtemps, très longtemps (au secours on dirait une histoire du Père Fouras…) puisqu'elle date d'environ 4000 ans lorsque dans la région de Mésopotamie (en Irak), un homme (ou une femme, ou peut-être Passe-partout… on ne sait pas : on n'a pas retrouvé de nom sur la tablette d'argile découverte lors de fouilles archéologiques) eut l'idée géniale suivante : pour résoudre l'équation $x^2+2x=8$, on cherche à « compléter » le carré. x^2+2x n'est pas un carré mais par contre x^2+2x+1 en est un, lui (Quoi, vous n'aviez pas reconnu l'identité remarquable $(x+1)^2=x^2+2x+1$? C'est pas possible, les vacances ont été trop longues ou quoi…). $x^2+2x=8$ devient $x^2+2x+1=8+1$ soit $(x+1)^2=9$ ce qui nous donne $\begin{cases} x+1=\sqrt{9} \\ \text{ou} \\ x+1=-\sqrt{9} \end{cases}$ soit $\begin{cases} x+1=3 \\ \text{ou} \\ x+1=-3 \end{cases}$

soit : $\begin{cases} x=2 \\ \text{ou} \\ x=-4 \end{cases}$. Génial… Mettre sous forme canonique c'est donc arriver à mettre le trinôme du 2nd degré ax^2+bx+c sous la forme : $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$, (forme qu'on voit en 2nde) et qui est très commode pour résoudre des équations, mais aussi centrer ou tracer la courbe $y=ax^2+bx+c$ (une parabole) trouver l'abscisse et l'ordonnée du sommet, etc.

METHODE 1 : Comment mettre sous forme canonique ?

■ Principe

1) Factoriser par a (si $a \neq 1$)
2) Chercher des identités remarquables :
N'oubliez pas que ces identités remarquables sont (Voir Method's 3e) :

- $(m+p)^2 = m^2 + 2mp + p^2$
- $(m-p)^2 = m^2 - 2mp + p^2$
- $(m-p)(m+p) = m^2 - p^2$

■ **Exemple :** *Mettre sous forme canonique le trinôme du 2nd degré :* $x^2 + 4x$.

On a : $x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 - 4 = (x+2)^2 - 4$

Vérification (optionnelle) : $(x+2)^2 - 4 = x^2 + 4x + 4 - 4 = x^2 + 4x$. C'est bon !

■ **Exemple :** *Mettre sous forme canonique :* $2x^2 + 8x + 3$.

On a : $2x^2 + 8x + 3 = 2 \cdot \left(x^2 + 4x + \frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(x^2 + 4x + 4 - 4 + \frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left((x+2)^2 - 4 + \frac{3}{2}\right)$

soit $2x^2 + 8x + 3 = 2 \cdot \left((x+2)^2 - \frac{8}{2} + \frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left((x+2)^2 - \frac{5}{2}\right) = 2(x+2)^2 - 5$. Ok ?

Vérif' : $2(x+2)^2 - 5 = 2\left(x^2 + 4x + 4\right) - 5 = 2x^2 + 8x + 8 - 5 = 2x^2 + 8x + 3$. Cool…

■ **Exemple :** *Mettre sous forme canonique :* $-3x^2 + 6x - 5$.

On a : $-3x^2 + 6x - 5 = -3 \cdot \left(x^2 - 2x + \frac{5}{3}\right) = -3 \cdot \left(x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{5}{3}\right) = -3 \cdot \left((x-1)^2 + \frac{2}{3}\right)$

soit : $-3x^2 + 6x - 5 = -3(x-1)^2 - 2$

Vérif' : $-3(x-1)^2 - 2 = -3\left(x^2 - 2x + 1\right) - 2 = -3x^2 + 6x - 3 - 2 = -3x^2 + 6x - 5$. Yes !

■ **Exemple :** *Mettre sous forme canonique :* $x^2 - 5x + 1$.

On a : $x^2 - 5x + 1 = x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 1 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}$

Vérif' : $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} = x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{21}{4} = x^2 - 5x + \frac{4}{4} = x^2 - 5x + 1$. Oh yeah…

REMARQUES : 1) Observez qu'on utilise toujours la même astuce (c'est une astuce mésopotamienne !) pour faire apparaître une identité remarquable : on ajoute 0 que l'on remplace par $+4-4$ *dans le 1er et 2e exemple, par* $+1-1$ *dans le 3e et par* $+\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$ *dans le 4e*. Un jeu d'enfant, non ?

2) Au fait, quel est l'intérêt de la mise sous forme canonique de ax^2+bx+c *? Ce n'est pas parce que votre prof veut se faire plaisir ! Il y a principalement quatre applications qui en découlent :*
La 1re, graphique, est qu'elle permet de déterminer l'abscisse du sommet de la parabole $y=ax^2+bx+c$*. Ce sommet a pour abscisse* $\frac{-b}{2a}$ *(voir méthode 2).*
La 2e est que l'on peut tout à fait résoudre une équation du 2nd degré en utilisant une mise sous forme canonique (voir méthode 6).
La 3e est qu'elle permet de justifier les formules de résolution par le discriminant d'une équation du 2nd degré (voir méthode 7), méthode expéditive, comme on le verra.
La 4e est que lorsque vous étudierez les équations de cercle (voir Chapitre 16) vous effectuerez deux mises sous formes canoniques (une pour les x, une autre pour les y) afin de trouver les coordonnées du centre du cercle et son rayon.
3) On peut toujours vérifier ses calculs en développant le résultat, ce n'est pas obligatoire mais c'est toujours bon de le faire pendant un DS s'il reste du temps. N'oubliez pas qu'il vaut mieux vérifier ses calculs afin d'assurer la moyenne plutôt que de chercher à aller trop vite (et claquer le 20 sur 20) ! Nous le répétons, à moins que vous ne soyez vraiment entraîné et sûr de vous (ce qui nécessite d'avoir un certain niveau, du genre : je fais trois identités remarquables par seconde, je connais toutes mes tables de Pythagore jusqu'à la 27e, pour moi cosinus et sinus sont mes meilleurs potes et je lis les œuvres d'Archimède directement en grec ancien avec mes écouteurs sur un morceau de reggae…), nous vous conseillons de faire cette vérification : dans un DS, il faut avant tout assurer les points !
4) On peut trouver la mise sous forme canonique directement avec un logiciel de calcul formel comme Xcas (ce n'est pas vraiment de la triche, c'est même conseillé de savoir le faire !), tenez, demandons-lui de mettre x^2+6x+1 *sous forme canonique :*

```
canonical_form(x^2+6x+1)
                                  (x+3)^2-8
```

ou même $2x^2+8x+3$ *par exemple :*

```
canonical_form(2x^2+8x+3)
                                  2(x+2)^2-5
```

5) En fait, il y a une formule de mise sous forme canonique : $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ *(mais elle fait peur, non ? Attention : Ne cherchez pas à retenir cette formule par cœur (ni même à l'appliquer), ça ne vous servira à rien si ce n'est à encombrer votre mémoire. Il vaut mieux savoir effectuer directement les calculs sur chaque exemple !)*

2. Courbe et variations d'une fonction trinôme du second degré

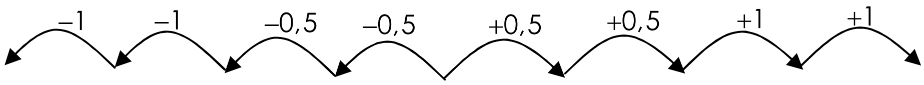
A- Comment tracer la courbe d'une fonction trinôme du second degré ?

La courbe de la fonction trinôme du second degré $x \to ax^2 + bx + c$ est une parabole. Cette parabole a pour sommet le point d'abscisse $\frac{-b}{2a}$, et un axe de symétrie vertical (passant par le sommet) d'équation $x = \frac{-b}{2a}$. Selon le signe de a, elle est dans le bon ou dans le mauvais sens (si elle est dans le mauvais, on dit qu'elle est inversée). Ce qui nous donne la méthode suivante.

METHODE 2 : En utilisant l'équation $y = ax^2 + bx + c$

■ **Principe**

1) Calculer $\frac{-b}{2a}$ puis la placer comme valeur centrale du tableau de valeurs (c'est logique vu que c'est l'abscisse du sommet).
2) "Mettre" $+0,5$ et $-0,5$, (ou $+0,25$ et $-0,25$) (deux fois) autour du sommet pour affiner le tracé puis aller de 1 en 1, comme ci-dessous (en essayant de tomber sur des valeurs "pratiques") :



x					$\frac{-b}{2a}$				
f(x)									

3) Calculer chacune des images (dans la deuxième ligne du tableau) : avec la calculatrice et la fonction table, c'est fait en deux secondes !

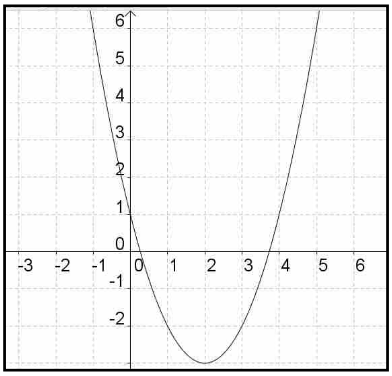
■ **Exemple :** *Soit* f *la fonction trinôme du* 2nd *degré définie par :* $f : x \to f(x) = x^2 - 4x + 1$. *Tracer* C_f *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i},\vec{j})$. *Donner l'équation de son axe de symétrie.*

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases} \text{ d'où } \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (c nous est inutile)}$$

On construit alors le tableau de valeurs, centré en **2** (utiliser la fonction table de votre calculatrice avec *tblstart:* -1 et $\Delta tbl = 0,5$).

x	−1	0	1	1,5	**2**	2,5	3	4	5
f(x)	6	1	−2	−2,75	−3	−2,75	−2	1	6

Puis la courbe C_f :



L'axe vertical de symétrie a pour équation $x = \frac{-b}{2a} = 2$ (on n'est pas obligé de le tracer, ça se voit non ?).

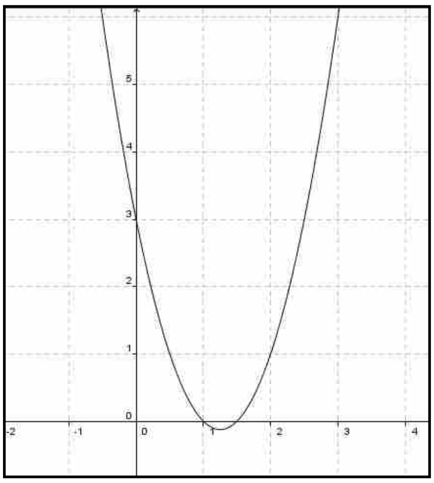
■ **Exemple :** *Soit* f *la fonction trinôme du* 2nd *degré définie par :* $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$. *Tracer* C_f *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i},\vec{j})$. *Donner l'équation de son axe de symétrie.*

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 3 \end{cases} \text{ d'où } \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2\cdot 2} = \frac{5}{4} = 1{,}25 .$$

On construit alors le tableau de valeurs, centré en $\frac{5}{4} = 1{,}25$ (utiliser la fonction table de votre calculatrice avec *tblstart:* $-1{,}75$ et $\Delta tbl = 0{,}25$).

x	−1,75	−0,75	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	3,25	4,25
f(x)	17,875	7,875	1,875	0,375	−0,125	0,375	1,875	7,875	17,875

puis la courbe C_f



L'axe vertical de symétrie a pour équation $x = \frac{-b}{2a} = 1{,}25$.

METHODE 3 : En utilisant la forme canonique $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$

■ Principe

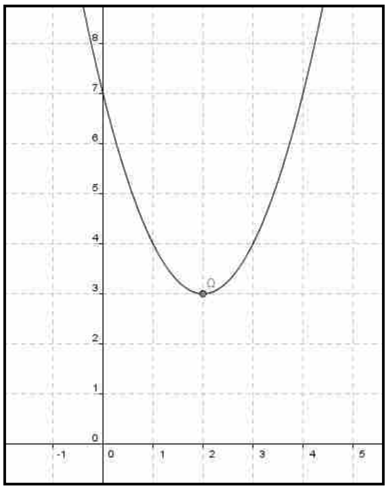
C'est tout l'avantage de la mise sous forme canonique, si on arrive à mettre $f(x) = ax^2 + bx + c$ sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, on y gagne vraiment.

En effet (et ça vous l'avez déjà vue en 2nde), voici ce qu'il faut retenir :

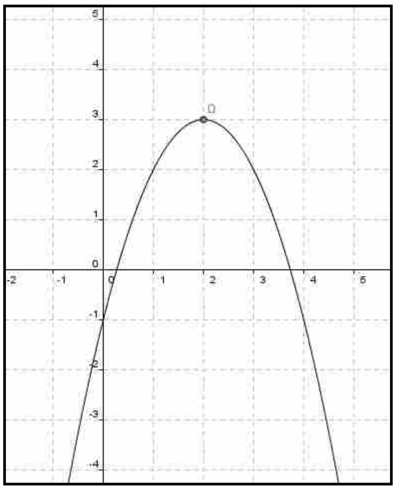
La courbe $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est une parabole de sommet $\Omega\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$.

a) Si $a > 0$ alors la parabole est dans le bon sens et β est un minimum.

b) Si $a < 0$ alors la parabole est dans le mauvais sens et β est un maximum.

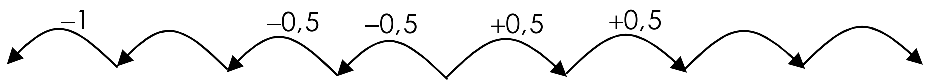


$a > 0$



$a < 0$

Pour construire la courbe, on centre son tableau de valeurs en α, tout simplement, puis on procède comme dans la méthode 2.



x					α				
f(x)					β				

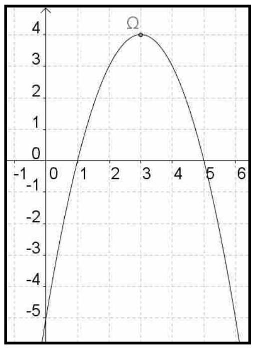
■ Exemple (forme adaptée) : *Soit* f *la fonction polynôme du 2nd degré définie par :* $f : x \to f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

a) Ecrire f(x) *sous forme canonique.*

b) En déduire le tableau de valeurs de f *puis tracer* C_f *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Après calculs, on trouve $f(x) = -(x-3)^2 + 4$.

b) La courbe a pour équation $y = -(x-3)^2 + 4$ c'est-à-dire une équation de la forme $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec :



$a = -1$ (donc ce sera une parabole inversée).
$\alpha = 3$. On va donc centrer le tableau de valeurs en 3.
$\beta = 4$. Ce qui nous donnera pour maximum 4.
(C'est un maximum parce que la parabole est dans le mauvais sens !).
On obtient le tableau de valeurs (à la calculatrice) :

x	0	1	2	2,5	**3**	3,5	4	5	6
$f(x)$	-5	0	3	3,75	4	3,75	3	0	-5

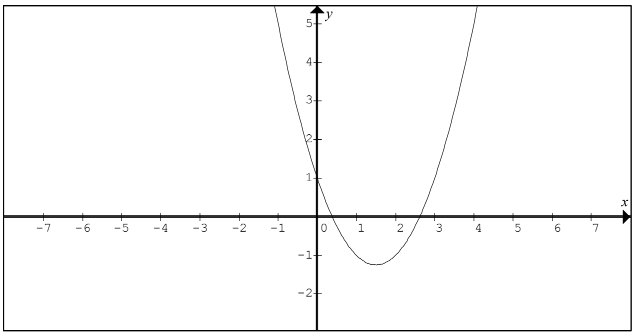
REMARQUE : Dans Method's Seconde, il y a une super activité $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ qui permet de visualiser la parabole lorsqu'on fait varier a, α et β .

B- Comment obtenir le tableau de variations d'une fonction polynôme du second degré ?

METHODE 4 : En utilisant l'équation $y = ax^2 + bx + c$, $\dfrac{-b}{2a}$, et le signe de a

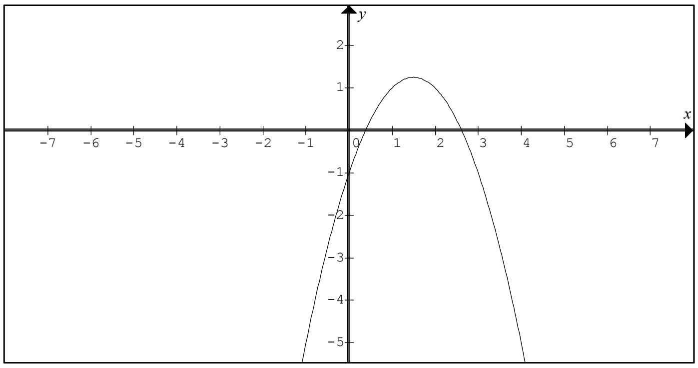
■ Principe

Deux cas (correspondant à deux paraboles) peuvent se produire, selon le signe de a :
a) Décroissant-croissant (parabole dans le "bon sens") si $a > 0$.



x	$-\infty$	$\dfrac{-b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	↘		↗

b) Croissant-décroissant (parabole "inversée") si $a < 0$.



x	$-\infty$ $\qquad \frac{-b}{2a} \qquad$ $+\infty$
ax^2+bx+c	$\nearrow \quad \searrow$

REMARQUE : On voit bien que dans les 2 cas le sommet a pour abscisse $\frac{-b}{2a}$.

■ **Exemple :** *Déterminer le sens de variation de la fonction trinôme* $f : x \to f(x) = 2x^2 - 3x + 4$. *En déduire son minimum.*

$a = 2$ donc $a > 0$. $\frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$ ce qui donne le tableau de variations :

x	$-\infty$ $\qquad \frac{3}{4} \qquad$ $+\infty$
$2x^2-3x+4$	$\searrow \quad \frac{23}{8} \quad \nearrow$

car $2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{4} + 4 = \frac{23}{8}$.

Le tableau de variations nous indique que le minimum de la fonction $f : x \to f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ vaut $\frac{23}{8}$, c'est-à-dire : pour tout x, $2x^2 - 3x + 4 \geq \frac{23}{8}$.

■ **Exemple :** *Déterminer le sens de variation de la fonction trinôme* $g : x \to g(x) = -x^2 + 4x - 3$. *En déduire son maximum.*

$a = -1$ donc $a < 0$. $\frac{-b}{2a} = \frac{-(4)}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$ ce qui donne le tableau de variations :

x	$-\infty$ $\qquad 2 \qquad$ $+\infty$
$-x^2+4x-3$	$\nearrow \quad 1 \quad \searrow$