SAVOIRS

Thème 1 - Le langage mathématique

Nous regroupons dans ce thème initial quelques notions élémentaires, notamment sur les ensembles et sur les applications, utiles pour s'exprimer correctement dans la langue mathématique. Cependant, l'étudiant ne doit pas être surpris de trouver ces notions probablement réparties dans plusieurs chapitres du cours de son professeur !

[S1.1] Éléments de logique

Considérons des énoncés mathématiques P et Q susceptibles d'être vrais ou faux (quand un énoncé est présenté comme étant vrai, on parle d'**assertion** mathématique) :

- l'énoncé « P et Q » est l'énoncé qui est vrai lorsque les deux énoncés sont vrais ;
- l'énoncé « P ou Q » est l'énoncé qui est vrai lorsque l'un au moins des deux énoncés est vrai ;
- l'énoncé « $P \Rightarrow Q$ » est l'énoncé qui est vrai lorsque P et Q sont vraies, lorsque P et Q sont fausses ainsi que lorsque P est fausse et Q est vraie.

✓ La définition de l'implication « $P \Rightarrow Q$ » est troublante car elle signifie par exemple qu'il est juste de dire qu'un énoncé faux implique un énoncé faux... L'origine de cette confusion vient du fait que, dans la pratique, un raisonnement mathématique est une succession d'implications dans lesquelles tous les énoncés sont vrais (et c'est le fait que le point de départ soit vrai et que toutes les implications soient vraies qui induit le fait que la conclusion soit vraie).

Il y a plusieurs façons de lire l'implication $P \Rightarrow Q$:

- **si** P est vrai **alors** Q est vrai ;
- pour que P soit vrai, **il faut** que Q soit vrai ;
- une **condition nécessaire** pour que P soit vrai est que Q soit vrai ;
- pour que Q soit vrai, **il suffit** que P soit vrai ;
- une **condition suffisante** pour que Q soit vrai est que P soit vrai.

La réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$. Cependant, rien n'assure que la réciproque d'une implication soit vraie. Si les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies, alors on écrit $P \iff Q$ et on dit que :

- P et Q sont **équivalents** ;
- P est vrai **si et seulement si** Q est vrai ;
- pour que P soit vrai, **il faut et il suffit** que Q soit vrai ;
- une **condition nécessaire et suffisante** pour que P soit vrai est que Q soit vrai.

✓ Notons que ce que l'on appelle un **théorème** n'est rien d'autre qu'une implication $H \Rightarrow C$ où l'énoncé H est constitué des *hypothèses* et l'énoncé C est la *conclusion*. Énoncer un théorème sans préciser les hypothèses n'a donc pas le moindre sens.

Une proposition, un lemme ou un corollaire sont des théorèmes mais l'usage (dans les cours de mathématiques !) veut que l'on réserve le terme de théorème aux résultats les plus importants, une proposition donne un résultat de moindre importance, un lemme donne un résultat préparatoire à la démonstration d'un ou plusieurs théorèmes et un corollaire est un résultat qui se déduit d'un autre théorème (typiquement cela peut être un cas particulier).

La négation $\neg P$ d'une proposition P est vraie lorsque P est fausse et *vice-versa*, on a donc :

- la négation de « P et Q » est « $\neg P$ ou $\neg Q$ » ;
- la négation de « P ou Q » est « $\neg P$ et $\neg Q$ » ;
- la négation de « $P \Rightarrow Q$ » est « P et $\neg Q$ » (dire que l'implication est fausse signifie que l'on a l'hypothèse sans avoir la conclusion).

[S1.2] L'usage des quantificateurs

Pour indiquer qu'un énoncé mathématique est vrai quel que soit la valeur d'une variable, on utilise le **quantificateur universel** $\forall$ qui se lit « quel que soit » ou « pour tout ». Considérons une propriété $\mathcal{P}(x)$ dépendant d'une variable x ; pour dire que la propriété $\mathcal{P}(x)$ est vérifiée pour tout x dans un ensemble E, on écrit :

$$\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x).$$

Pour indiquer que la propriété $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour *au moins* un élément x dans l'ensemble E, on utilise le **quantificateur existentiel** $\exists$ qui se lit « il existe » et on écrit :

$$\exists x \in E\ /\ \mathcal{P}(x).$$

✓ Pour indiquer que la propriété $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour *exactement* un élément x dans l'ensemble E, il est d'usage d'écrire :

$$\exists ! x \in E\ /\ \mathcal{P}(x).$$

✓ L'ordre des quantificateurs importe quand ils ne sont pas de même nature. Par exemple, la phrase :

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ \exists d \in \mathbb{N}^*\ /\ dx \in \mathbb{Z},$$

est vraie (elle signifie que d est le dénominateur d'une fraction représentant le nombre rationnel x) alors que la phrase :

$$\exists d \in \mathbb{N}^*\ /\ \forall x \in \mathbb{Q},\ dx \in \mathbb{Z},$$

est fausse (elle signifierait qu'il existe un dénominateur commun à toutes les fractions).

Si $\mathcal{P}(x)$ est un énoncé dépendant d'une variable x alors :

– la négation de « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ » est « $\exists x \in E \;/\; \neg\mathcal{P}(x)$ » ;

– la négation de « $\exists x \in E \;/\; \mathcal{P}(x)$ » est « $\forall x \in E,\ \neg\mathcal{P}(x)$ ».

[S1.3] Le vocabulaire des ensembles

Certains termes couramment employés sont des notions intuitives que nous ne définissons pas.

– Un **ensemble** correspond à une collection (mais qu'est-ce alors qu'une collection ?) d'objets que l'on appelle les **éléments** de l'ensemble. On dit que les éléments **appartiennent** à l'ensemble. Pour noter que x est un élément d'un ensemble E, on écrit $x \in E$ (et inversement $x \notin E$ quand ce n'est pas le cas).

– L'**ensemble vide**, noté $\varnothing$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

– L'**égalité** signifie que deux objets sont identiques : $E = F$, $x = y$,...

  Des objets qui ne sont pas égaux sont dits **distincts** ou **différents** et on utilise le symbole $\neq$.

– Un **couple** est la donnée de deux objets (égaux ou différents) de façon ordonnée, on note (x, y) le couple formé de l'objet x puis de l'objet y.

  De façon analogue, on utilise les termes de **triplet**, **quadruplet**, etc. et plus généralement, on parle de n**-uplet** pour désigner une liste ordonnée de n objets $(x_1, \ldots, x_n)$.

Un ensemble peut être essentiellement décrit de deux façons.

○ **En extension** : on écrit exhaustivement entre deux accolades la liste des éléments de l'ensemble ; par exemple l'ensemble des jours de la semaine est :

$$\Big\{\text{lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi, dimanche}\Big\}.$$

  L'ordre et les répétitions ne modifient pas l'ensemble et il peut parfois être pratique d'utiliser des points de suspension si cela ne crée aucune ambigüité.

○ **En compréhension** : l'ensemble est défini à l'aide d'une propriété caractérisant les éléments d'un ensemble donné ; par exemple, l'ensemble des carrés d'entiers est :

$$\Big\{x \in \mathbb{N} \;;\; \exists y \in \mathbb{N} \;/\; x = y^2\Big\}.$$

  La syntaxe générale est $\{x \in E \;;\; \mathcal{P}(x)\}$ où $\mathcal{P}$ est la propriété que doivent vérifier les éléments de E pour être dans ledit ensemble (le point virgule précédant la condition peut être remplacé par une barre | ou /).

  Par exemple, si m et n sont deux entiers, alors il est usuel de noter :

$$[\![m, n]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \;;\; m \leqslant k \leqslant n\},$$

  ce qui signifie que $[\![m, n]\!]$ est l'ensemble des entiers qui sont supérieurs ou égaux à m et inférieurs ou égaux à n.

Le symbole d'**inclusion** $\subset$ entre deux ensembles permet d'indiquer que tout élément de l'ensemble de gauche est dans l'ensemble de droite : écrire $E \subset F$ signifie que tout élément de E est également un élément de F ; par exemple :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \quad , \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \quad , \quad \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \quad , \quad \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

(tous les entiers naturels sont des entiers relatifs, ces derniers sont tous des nombres décimaux, eux-mêmes sont tous des nombres rationnels, qui sont tous des nombres réels et tous les nombres réels sont des nombres complexes).
Lorsque $A \subset E$, on dit que A est une **partie** de E ou un **sous-ensemble** de E.
La notation $A \not\subset E$ signifie que A n'est pas inclus dans E c'est-à-dire qu'au moins un élément de A n'est pas dans E.

Le **produit cartésien** de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$. Par exemple :

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geqslant 0 \text{ et } y > 0\Big\}.$$

Plus généralement, si $E_1,\ E_2, \ldots, E_p$ sont des ensembles alors l'ensemble des p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, avec $x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2, \ldots,\ x_p \in E_p$, est noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$.
Dans le cas particulier où les ensembles sont tous égaux, le produit cartésien $E \times E \times \cdots \times E$ est noté E^p et ses éléments sont appelés des p-**listes.**

[S1.4] Parties d'un ensemble

L'**ensemble des parties** d'un ensemble E est noté $\mathscr{P}(E)$.

✓ Il revient au même d'écrire « $\forall A \subset E$ » que « $\forall A \in \mathscr{P}(E)$ ».

Si A et B sont deux parties de E alors :

– la **réunion** de A et B est l'ensemble (on lit « A union B ») :

$$A \cup B = \big\{x \in E \ ; \ x \in A \text{ ou } x \in B\big\};$$

– l'**intersection** de A et B est l'ensemble (on lit « A inter B ») :

$$A \cap B = \big\{x \in E \ ; \ x \in A \text{ et } x \in B\big\};$$

– le **complémentaire** de A dans E est l'ensemble :

$$\overline{A} = \big\{x \in E \ ; \ x \notin A\big\};$$

– la **différence** de A et B est l'ensemble :

$$A \setminus B = \big\{x \in A \ ; \ x \notin B\big\};$$

– on dit que les parties A et B sont **disjointes** lorsque :

$$A \cap B = \varnothing.$$

✓ La notation du complémentaire d'une partie A d'un ensemble est susceptible d'être ambigüe. En effet, cela suppose que l'ensemble E, dans lequel le complémentaire est considéré, est implicite. Il arrive donc que l'on utilise la notation $\complement_E^A$ pour indiquer $\{x \in E \ ; \ x \notin A\}$.

✓ Si A et B sont deux parties disjointes de E alors on note $A \sqcup B$ ou $A \uplus B$ la réunion $A \cup B$ en signalant le caractère disjoint des deux parties. On parle alors de l'**union disjointe** de A et B.

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble (non vide) E, alors :
- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$;
- $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$;
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$.

[S1.5] Vocabulaire sur les fonctions

Une **fonction** f se note $f : E \to F,\ x \mapsto f(x)$ ou $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

Ces deux notations se lisent « f, de E dans F, qui à x associe $f(x)$ ». Bien entendu la lettre x peut être remplacée par $t, y, u, \ldots$

Dans le cas où $f(x)$ a un sens pour tout x dans E, on dit que f est une **application** (cependant dans la suite les deux termes de fonction et d'application seront confondus) et que E est l'**ensemble de définition** de f, on dit que f est **définie sur** E. L'ensemble F est appelé l'**ensemble d'arrivée** de f, on dit que f est **à valeurs dans** F ou que f **prend ses valeurs dans** F ; on dit aussi que f **va de** E **dans** F.

L'ensemble des fonctions de E vers F est noté F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$.

Lorsqu'on a une égalité $f(x) = y$ (avec $x \in E$ et $y \in F$), on dit que y est **l'image** de x par f et que x est **un antécédent** (ou **une préimage**) de y par f.

Si A est une partie de E alors l'application $f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est appelée **la restriction** de f à A.

Enfin, on note $f(A)$ la partie de F définie par :

$$f(A) = \big\{ f(x) \ ; \ x \in A \big\} \quad i.e. \quad f(A) = \big\{ y \in F \ ; \ \exists x \in A \ / \ f(x) = y \big\}$$

et on dit que $f(A)$ est **l'image** (directe) de la partie A par l'application f.

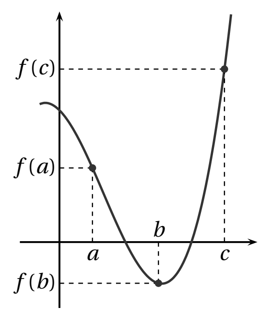
✓ Si A est une partie d'un ensemble E alors on appelle **fonction indicatrice** de A la fonction, notée χ_A ou $\mathbf{1}_A$, définie par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

Une telle fonction est définie sur E, à valeurs dans $\{0; 1\}$. Plus précisément, on a $\mathbf{1}_A(E) = \{0\}$ si $A = \varnothing$, $\mathbf{1}_A(E) = \{1\}$ si $A = E$, et $\mathbf{1}_A(E) = \{0; 1\}$ dans le cas général.

✓ Il est pratique d'utiliser la notion d'**application identité de** E, notée id_E (ou I_E), définie par : $\mathrm{id}_E : E \to E,\ x \mapsto x$.

On suppose que le plan est muni d'un repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ (la plupart du temps, il s'agit d'un repère orthonormal) et on considère une fonction f définie sur une partie E de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans une partie F de $\mathbb{R}$.
La **représentation graphique** (ou le **graphe**) de f est l'ensemble des points de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$ où $x \in E$.



[S1.6] Composition des applications

Considérons trois ensembles E, F et G et deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
On appelle **application composée** de f par g la fonction, notée $g \circ f$ (on lit « *g rond f* »), définie par :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \end{array}.$$

[S1.7] Bijections et applications réciproques

Soit f une application définie sur un ensemble E et à valeurs dans un ensemble F.

– On dit que f est **bijective** ou que c'est une **bijection** lorsque :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E \ /\ \ y = f(x),$$

c'est-à-dire lorsque tout élément de F admet *un unique antécédent* par f.
Autrement dit, lorsque pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet une et une seule solution.

– Pour tout $y \in F$, l'unique élément $x \in E$ vérifiant $f(x) = y$ est noté $x = f^{-1}(y)$ et l'application :

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & F & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & f^{-1}(y) \end{array}$$

est appelée **l'application réciproque** de l'application f.

✓ Si f est une application bijective de E dans F alors l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ vérifie :

$$\forall x \in E,\ f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in F,\ f\big(f^{-1}(y)\big) = y.$$

Cela revient à écrire $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.
Inversement, trouver une application $g : F \to E$ vérifiant $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$ signifie que f est bijective et que $g = f^{-1}$.

✓ Notons que l'application réciproque f^{-1} d'une bijection f est aussi bijective donc possède elle-même une réciproque.
L'application réciproque de f^{-1} est f autrement dit : $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

✓ Dans le cas d'une fonction bijective f définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, les représentations graphiques de f et de f^{-1} dans un repère orthonormal sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux bijections alors $g \circ f$ est une bijection et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

[S1.8] Injections et surjections

On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est **injective** ou que c'est une **injection** lorsque :

$$\forall (x, x') \in E^2,\ \big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\big),$$

c'est-à-dire lorsque tout élément de F admet *au plus un antécédent* par f.
Ainsi, f est injective si et seulement si :

$$\forall (x, x') \in E^2,\ \big(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\big).$$

Autrement dit lorsque, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet *au plus* une solution.

✓ Si f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si f est strictement monotone sur I alors f est injective.