A-1 Autour des nombres complexes

ÉNONCÉS DES EXERCICES

1-1. Déterminer dans chaque cas : z_1+z_2, z_1-z_2, $-2z_1+3z_2$, $z_1\times z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $z_1\times\overline{z_1}$ et $z_2\times\overline{z_2}$.

a) $z_1=4+2i$, $z_2=3-i$ **b)** $z_1=i$, $z_2=1+i$ **c)** $z_1=-i$, $z_2=2+i$

1-2. Déterminer dans chaque cas, $|z|$ et $\arg(z)$, la forme trigonométrique et la forme exponentielle de z.

a) $z=1+i$ **b)** $z=1-i$ **c)** $z=-1+i$ **d)** $z=-1-i$
e) $z=\sqrt{3}+i$ **f)** $z=\sqrt{3}-i$ **g)** $z=-\sqrt{3}+i$ **h)** $z=-\sqrt{3}-i$
i) $z=1+i\sqrt{3}$ **j)** $z=1-i\sqrt{3}$ **k)** $z=-1+i\sqrt{3}$ **l)** $z=-1-i\sqrt{3}$

1-3. Déterminer dans chaque cas, la distance AB :

a) $z_A=3+2i$; $z_B=7+5i$ **b)** $z_A=-2i$; $z_B=1+5i$ **c)** $z_A=-1$; $z_B=4i$

1-4. Dans chaque cas, résoudre l'équation :

a) $\dfrac{1}{z}=1-i$ **b)** $\dfrac{2}{z-i}=i-1$ **c)** $(2+i)z=2+6i$ **d)** $z-i=2z+i$

1-5. Dans chaque cas, résoudre l'équation :

a) $z^2+2z+2=0$ **b)** $z^2+4z+8=0$ **c)** $z^2+36=0$

CORRIGÉS DES EXERCICES

1-1.

a) Sachant que $z_1 = 4+2i$ et $z_2 = 3-i$, on a :

$z_1 + z_2 = 4+2i+3-i = 7+i$;

$z_1 - z_2 = 4+2i-(3-i) = 4+2i-3+i = 1+3i$;

$-2z_1 + 3z_2 = -2(4+2i)+3(3-i) = -8-4i+9-3i = 1-7i$;

$z_1 \times z_2 = (4+2i)(3-i) = 12-4i+6i-2i^2 = 12+2i+2 = 14+2i$; **I**

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+2i}{3-i} = \frac{(4+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{12+4i+6i+2i^2}{9-i^2} = \frac{12+10i-2}{10} = \frac{10+10i}{10} = 1+i$; **I**

$\overline{z_1} = 4-2i$; $\overline{z_2} = 3+i$; **C**

$z_1 \times \overline{z_1} = (4+2i)(4-2i) = 4^2 - (2i)^2 = 16-4i^2 = 16+4 = 20$; **C**

$z_2 \times \overline{z_2} = (3-i)(3+i) = 3^2 - i^2 = 9+1 = 10$; **C**

b) Sachant que $z_1 = i$ et $z_2 = 1+i$, on a :

$z_1 + z_2 = i+1+i = 1+2i$;

$z_1 - z_2 = i-(1+i) = i-1-i = -1$;

$-2z_1 + 3z_2 = -2i+3(1+i) = -2i+3+3i = 3+i$;

$z_1 \times z_2 = i(1+i) = i+i^2 = i-1 = -1+i$; **I**

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{1-i^2} = \frac{i-i^2}{1+1} = \frac{i+1}{2} = \frac{1+i}{2}$; **I**

$\overline{z_1} = -i$; $\overline{z_2} = 1-i$; **C**

$z_1 \times \overline{z_1} = i(-i) = -i^2 = 1$; **C**

$z_2 \times \overline{z_2} = (1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1+1 = 2$; **C**

c) Sachant que $z_1 = -i$ et $z_2 = 2+i$, on a :

$z_1 + z_2 = -i + 2 + i = 2$;

$z_1 - z_2 = -i - (2+i) = -i - 2 - i = -2 - 2i$;

$-2z_1 + 3z_2 = -2(-i) + 3(2+i) = 2i + 6 + 3i = 6 + 5i$;

$z_1 \times z_2 = (-i)(2+i) = -2i - i^2 = -2i + 1 = 1 - 2i$; **I**

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-i}{2+i} = \dfrac{-i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{-2i+i^2}{4-i^2} = \dfrac{-2i-1}{4+1} = \dfrac{-1-2i}{5}$; **I**

$\overline{z_1} = i$; $\overline{z_2} = 2 - i$; **C**

$z_1 \times \overline{z_1} = (-i)i = -i^2 = 1$; **C**

$z_2 \times \overline{z_2} = (2+i)(2-i) = 2^2 - i^2 = 4 + 1 = 5$; **C**

1-2.

a) $|z| = |1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Donc $\rho = |z| = \sqrt{2}$. **M1**

$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. Donc $\arg(z) = \theta = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$. **A1**

Forme trigo : $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$. **F1**

Forme expo : $z = \rho e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. **F2**

b) $|z| = |1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Donc $\rho = |z| = \sqrt{2}$. **M1**

$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. Donc $\arg(z) = \theta = -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$. **A1**

Forme trigo : $z=\rho\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. **F1**

Forme expo : $z=\rho e^{i\theta}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. **F2**

c) $|z|=|-1+i|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$. Donc $\rho=|z|=\sqrt{2}$. **M1**

$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{a}{|z|}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{b}{|z|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$. Donc $\arg(z)=\theta=\frac{3\pi}{4}[2\pi]$. **A1**

Forme trigo : $z=\rho\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$. **F1**

Forme expo : $z=\rho e^{i\theta}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. **F2**

d) $|z|=|-1-i|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. Donc $\rho=|z|=\sqrt{2}$. **M1**

$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{a}{|z|}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{b}{|z|}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$. Donc $\arg(z)=\theta=\frac{5\pi}{4}[2\pi]$. **A1**

Forme trigo : $z=\rho\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$. **F1**

Forme expo : $z=\rho e^{i\theta}=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$. **F2**

e) $|z|=|\sqrt{3}+i|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$. Donc $\rho=|z|=2$. **M1**

$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{a}{|z|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{b}{|z|}=\frac{1}{2}\end{cases}$. Donc $\arg(z)=\theta=\frac{\pi}{6}[2\pi]$. **A1**

Forme trigo : $z=\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$. **F1**

Forme expo : $z=\rho e^{i\theta}=2e^{i\frac{\pi}{6}}$. **F2**

f) $|z|=|\sqrt{3}-i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$. Donc $\rho=|z|=2$. **M1**

$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{a}{|z|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{b}{|z|}=\frac{-1}{2}\end{cases}$. Donc $\arg(z)=\theta=-\frac{\pi}{6}[2\pi]$. **A1**

Forme trigo : $z=\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$. **F1**

Forme expo : $z=\rho e^{i\theta}=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$. **F2**

g) $|z|=|-\sqrt{3}+i|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$. Donc $\rho=|z|=2$. **M1**

$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{a}{|z|}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{b}{|z|}=\frac{1}{2}\end{cases}$. Donc $\arg(z)=\theta=\frac{5\pi}{6}[2\pi]$. **A1**

Forme trigo : $z=\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$. **F1**

Forme expo : $z=\rho e^{i\theta}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$. **F2**

h) $|z|=|-\sqrt{3}-i|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$. Donc $\rho=|z|=2$. **M1**

$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{a}{|z|}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{b}{|z|}=\frac{-1}{2}\end{cases}$. Donc $\arg(z)=\theta=-\frac{5\pi}{6}[2\pi]$. **A1**

Forme trigo : $z=\rho\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)=2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$. **F1**

Forme expo : $z=\rho e^{i\theta}=2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$. **F2**

i) $|z|=\left|1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$. Donc $\rho=|z|=2$. **M1**

$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{a}{|z|}=\frac{1}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{b}{|z|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$. Donc $\arg(z)=\theta=\frac{\pi}{3}[2\pi]$. **A1**

Forme trigo : $z=\rho\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$. **F1**

Forme expo : $z=\rho e^{i\theta}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$. **F2**

j) $|z|=\left|1-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$. Donc $\rho=|z|=2$. **M1**

$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{a}{|z|}=\frac{1}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{b}{|z|}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$. Donc $\arg(z)=\theta=-\frac{\pi}{3}[2\pi]$. **A1**

Forme trigo : $z=\rho\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. **F1**

Forme expo : $z=\rho e^{i\theta}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. **F2**

k) $|z|=\left|-1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$. Donc $\rho=|z|=2$. **M1**

$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{a}{|z|}=\frac{-1}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{b}{|z|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$. Donc $\arg(z)=\theta=\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. **A1**

Forme trigo : $z=\rho\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$. **F1**

Forme expo : $z=\rho e^{i\theta}=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$. **F2**

l) $|z|=\left|-1-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$. Donc $\rho=|z|=2$. **M1**

$\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{a}{|z|}=\dfrac{-1}{2}\\ \sin(\theta)=\dfrac{b}{|z|}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$. Donc $\arg(z)=\theta=\frac{-2\pi}{3}[2\pi]$. **A1**

Forme trigo : $z=\rho\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)=2\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$. **F1**

Forme expo : $z=\rho e^{i\theta}=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. **F2**

1-3.

a) $AB=\left|z_B-z_A\right|=\left|7+5i-(3+2i)\right|=\left|7+5i-3-2i\right|=\left|4+3i\right|=\sqrt{4^2+3^2}$ **D**

$=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.

b) $AB=\left|z_B-z_A\right|=\left|1+5i-(-2i)\right|=\left|1+5i+2i\right|=\left|1+7i\right|=\sqrt{1^2+7^2}$ **D**

$=\sqrt{1+49}=\sqrt{50}=\sqrt{25\times2}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.

c) $AB=\left|z_B-z_A\right|=\left|4i-(-1)\right|=\left|4i+1\right|=\left|1+4i\right|=\sqrt{1^2+4^2}$ **D**

$=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$.

1-4.

a) $\frac{1}{z}=1-i \Leftrightarrow z=\frac{1}{1-i}=\frac{1\times(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i}{1-i^2}=\frac{1+i}{2}$. **C**

Donc : $S=\left\{\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right\}$. **I**

b) $\frac{2}{z-i}=i-1 \Leftrightarrow \frac{z-i}{2}=\frac{1}{i-1} \Leftrightarrow z-i=\frac{2}{i-1} \Leftrightarrow z-i=\frac{2}{-1+i} \Leftrightarrow z=\frac{2}{-1+i}+i$

$\Leftrightarrow z=\frac{2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}+i \Leftrightarrow z=\frac{-2-2i}{1-i^2}+i=\frac{-2-2i}{1+1}+i=\frac{-2-2i}{2}+i$ **C**

$\Leftrightarrow z=-1-i+i=-1$. **I**

Donc : $S=\{-1\}$.

c) $(2+i)z=2+6i \Leftrightarrow z=\frac{2+6i}{2+i} \Leftrightarrow z=\frac{(2+6i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4-2i+12i-6i^2}{2^2-i^2}$ **C**

$z=\frac{4+10i+6}{4+1}=\frac{10+10i}{5}=2+2i$. **I**

Donc : $S=\{2+2i\}$.

d) $z-i=2z+i \Leftrightarrow -i-i=2z-z \Leftrightarrow -2i=z$.

Donc : $S=\{-2i\}$.

1-5.

a) $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times2=4-8=-4$ **Δ1**

$\Delta<0$, il y a 2 solutions :

$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2+i\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{-2+2i}{2}=-1+i$ et **Δ2**