Partie I

OUTILS DE BASE : REVISIONS

Ça y est, c'est les vacances et vous vous êtes enfin installé sur le matelas pneumatique dont vous rêviez depuis le mois de février (peut-être même depuis le mois de septembre). Bien sûr, pour que tout le monde ne vous prenne pas pour un gros paresseux, vous avez décidé d'arborer fièrement votre cahier de vacances *Method'S*, histoire de montrer à tout le monde que vous avez décidé de prendre votre destin en main, comme en témoignent les remarques du genre « oh, dis donc t'as du courage ! » ou « Tu t'y mets déjà ? ». Soudain, une angoisse : et si ce qui vous attendait était incompréhensible, inabordable, et si vous étiez obligé de reposer ce livre tout découragé, en essuyant les remarques de ceux qui vous entourent : « Eh bien ça n'aura pas duré longtemps ! »

Heureusement, nous avons pensé à vous comme le prouve la présence de cette première partie ! En effet, cette première partie, à ne pas négliger, vous rappellera en douceur ce que vous saviez faire en Terminale et que vous avez déjà oublié, ce qui vous sera utile pour la deuxième partie, nouvelle, mais du coup abordable ! Alors, heureux (ou heureuse) ?

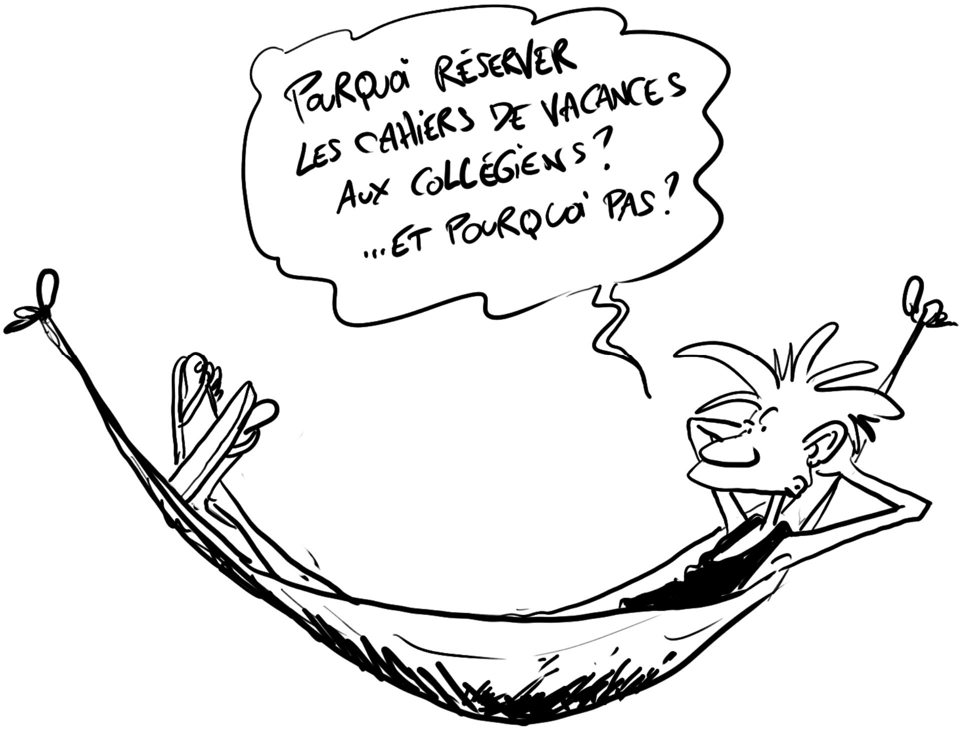
Au programme de cette première partie donc, des révisions sur les fonctions, les suites géométriques et le calcul intégral.

Ensuite, dans la deuxième partie nous réutiliserons tout cela et surtout nous verrons de nouvelles choses !

En tête de chapitre et pour débuter l'échauffement : rappel des méthodes de *Method'ES Terminale* à garder à portée de main (levez les bras), puis séance de Vrai ou Faux (levez bien la jambe droite), et enfin séance d'exercices (levez bien la gauche).

Sortez votre crayon noir (ou piquez celui de votre petite sœur qui l'utilise pour son sudoku et qui vient d'aller se baigner, ou celui de votre grand-mère qui l'utilise pour ses mots-croisés et qui est partie voir *Les feux de l'amour*), c'est parti !

Note : il n'est pas utile de vous mettre en tenue pour cet entraînement. Vous pouvez garder vos tongs et votre fauteuil favori, tout devrait se passer en douceur.



1 FONCTIONS

LES METHODES DE TES qu'il faut avoir en tête :

- ❑ Méthodes sur les dérivées des fonctions usuelles.
- ❑ Méthodes pour étudier les variations d'une fonction (dérivation).
- ❑ Méthodes sur la détermination de tangentes.
- ❑ Méthodes sur la fonction exponentielle.
- ❑ Méthodes sur la fonction logarithme.
- ❑ Théorème des valeurs intermédiaires.
- ❑ Méthodes sur le calcul intégral.

▶ Cf. *Méthod'ES Terminale*, chapitres 2, 3, 5, 6 et 7 pour le détail de ces méthodes.

VRAI OU FAUX ?

VRAI FAUX

1. Soit f la fonction définie sur $[-2;2]$ par : $f(x)=(x-1)e^{x}+2$. Alors $f(-2)<f(0)<f(2)$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=e^{2x}-7e^{x}+6$. Alors :

$h(x)=e^{x}\left(e^{x}-7+6e^{-x}\right)$.

3. L'équation $x^{3}+6x=20$ admet une unique solution réelle.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2-e^{2x-\ln(3)}$. Alors : $f(1)=5-e^{2}$.

5. La fonction $x\to\ln(x)$ est la primitive de la fonction $x\to\frac{1}{x}$ qui s'annule en 0.

6. Pour tous $a>0$ et $b>0$, $\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$.

7. Pour tous a et b, $e^{a+b}=e^{a}\times e^{b}$.

8. $\ln(30)=3\times\ln(10)$.

9. $\ln(32)=5\times\ln(2)$.

10. La fonction $f:x\to f(x)=e^{x}$ admet pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation : $y=1+x$.

11. Les fonctions $f:x\to f(x)=e^{x}$ et $g:x\to g(x)=e^{-x}$ ont des dérivées égales.

EXERCICES

❐ Exercice 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0{,}5;10\right]$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.

a) Montrer que pour tout $x\in\left[0{,}5;10\right]$, $f'(x)=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.

b) Déterminer le tableau de variations de f.

c) Montrer que l'équation $f(x)=-1$ admet une unique solution comprise entre 0,5 et e.

d) Montrer à l'aide du tableau de variations que l'équation $\ln(x)=x$ n'admet aucune solution réelle.

e) Soit g la fonction définie sur $\left[0{,}5;10\right]$ par $g(x)=\dfrac{1}{2}\left[\ln(x)\right]^2$. Montrer que g est une primitive de f.

f) En déduire l'intégrale $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\ln(x)}{x}dx$.

❐ Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $f(x)=10+(x-3)e^x$.

a) Démontrer que $f'(x)=(x-2)e^x$ et étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$.

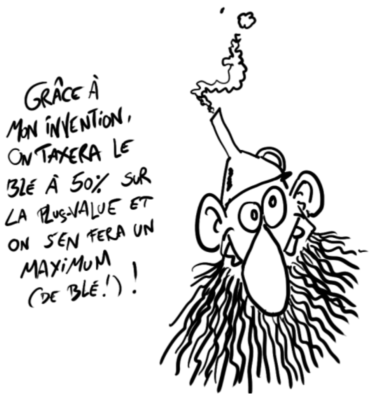
b) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$.

c) Etudier le signe de f sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$.

QUI A INVENTE LES MATHS ?

EPISODE 1. LES PREMIERES MATHEMATIQUES (MESOPOTAMIE ET EGYPTE)

Qui a eu l'idée d'inventer les mathématiques ? Qui est le responsable du calvaire de centaines de générations d'élèves ? Qui est donc le coupable ? Une question vaste à laquelle nous allons essayer de répondre. En plusieurs épisodes bien sûr car les mathématiques n'ont pas été créées en un jour, loin de là, leur élaboration a pris plusieurs siècles ! Les premières traces (écrites) d'activité mathématique furent trouvées dans une zone bien connue des historiens : la zone du croissant fertile. Cette région du monde (allant de l'actuel Irak jusqu'en Egypte) fut dominée par deux civilisations extrêmement brillantes (qui possèdent leur quartier au Louvre et dans d'autres musées du monde) : la civilisation mésopotamienne (et babylonienne) et la civilisation égyptienne. Toutes deux bénéficient de la présence de fleuves (le Tigre, L'Euphrate, le Nil) donc de terres très fertiles (grâce aux alluvions déposés par les fleuves). Ils inventent l'agriculture, 1000 fois plus productive que la simple chasse. Chaque récolte étant soumise à l'impôt, pour les calculer, ils inventent les équations du 1er degré. A chaque crue et décrue, les terrains cultivables changent de forme, il faut donc recalculer leur superficie : pour y parvenir, ces civilisations inventent les équations du second degré. Chaque fête, chaque événement particulier qui régule la vie agricole, religieuse ou sociale nécessite un calendrier fiable. Pour le mettre au point, ces civilisations inventent l'Astronomie et par conséquent la Trigonométrie. Ces civilisations brillantes nous ont donc légué une mathématique élaborée (et une architecture sublime), ce n'est donc pas un hasard si les tout premiers mathématiciens grecs comme Thalès et Pythagore (qui étaient aussi de grands voyageurs), vinrent s'instruire directement auprès d'eux. Allez, une petite visite au Louvre s'impose… il faut voir de ses propres yeux les tablettes d'argile et les papyrus qu'ont trouvés nos archéologues, c'est tout simplement incroyable !



ENIGME DE LA PLAGE

Le panier et les cent cailloux.

Il y a un panier et cent cailloux rangés en ligne droite et à des espaces égaux d'une toise. On propose de les ramasser et les rapporter dans le panier un à un, en allant d'abord chercher le premier, ensuite le second ; et ainsi de suite jusqu'au dernier. Combien de toises doit faire celui qui entreprendra cet ouvrage ? Jacques Ozanam, 1790.

2
SUITES GEOMETRIQUES

LES METHODES DE TES qu'il faut avoir en tête :

- ❑ Méthodes sur les suites géométriques.
- ❑ Méthodes sur les suites arithmético-géométriques

▶ Cf. *Méthod'ES Terminale*, chapitre 1 pour le détail de ces méthodes.

VRAI OU FAUX ?

VRAI FAUX

1. On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_{n+1} = U_n \times 2 \\ U_4 = 5 \end{cases}$.

Alors on a : $U_{11} = 640$.

2. Soit (a_n) la suite définie pour tout $n \geq 1$ par $\begin{cases} a_{n+1} = 0,5a_n + 0,2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$.

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = a_n - 0,4$. Alors (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5.

3. La suite (V_n) définie par la relation de récurrence $\begin{cases} V_{n+1} = 2V_n + 3 \\ V_0 = 5 \end{cases}$ est une suite arithmétique.

4. On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1{,}05$. La somme S des 12 premier termes de cette suite vaut $S = 2 \times \dfrac{1 - 1{,}05^{12}}{1 - 1{,}05}$.

5. Le 1er janvier 2000, un client a placé 3000 € à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %. On note C_n le capital du client au 1er janvier de l'année $2000 + n$, où n est un entier naturel.

Au 1er janvier 2013, le client aura une somme supérieure à 5000 €.