Chapitre 1

La mécanique céleste

1.1 L'astronomie avant Galilée

Au II^{e} siècle de notre ère, Claude **Ptolémée** ($\sim 90 - 168$) compile tout le savoir accumulé par ses devanciers (dont Hipparque 190 – 120 av. J.–C.) en matière d'astronomie. Dans son œuvre majeure, composée de treize livres et intitulée *Composition Mathématique*, Ptolémée décrit le mouvement des planètes, de la Lune et du Soleil. Tombé dans l'oubli au Moyen Âge, ce traité est redécouvert dans le monde arabo-musulman dès le IX^{e} siècle, mais il ne parvient en Europe occidentale qu'au tout début du XII^{e} siècle. On le connaît depuis sous son nom dérivé de l'Arabe, l'**Almageste** (la grande œuvre). Dernier grand astronome de l'Antiquité, Ptolémée est le dépositaire de la tradition philosophique grecque, initiée par **Aristote** au cours du IV^{e} siècle av. J.–C. En digne héritier de cet illustre penseur, il place la Terre, immobile, au centre de l'Univers. Les mouvements des astres sont la résultante de mouvements circulaires uniformes (réalisés sur un double système de cercles, déférents et épicycles), ceux-ci étant seuls considérés comme parfaits. C'est sur ces deux principes que repose le **géocentrisme**, doctrine qui persistera jusqu'au XVI^{e} siècle. En 1543 paraît le livre de Nicolas **Copernic** (1473 – 1543), *De Revolutionibus Orbium Coelestium*. Suivant des considérations plus ou moins métaphysiques, Copernic considère que la place privilégiée de ≪ centre de l'Univers ≫ revient au Soleil, astre resplendissant, plutôt qu'à la Terre (rejet du premier principe du géocentrisme). Chacune des six planètes connues à l'époque (Mercure, Vénus, y compris la Terre désormais, Mars, Jupiter et Saturne) décrit une trajectoire circulaire autour de Soleil supposé fixe. On peut considérer que cette date de 1543 marque la naissance de l'héliocentrisme en Occident [1]. La Terre est désormais considérée comme une planète [2]. Toutefois cette idée a mis du temps à s'imposer en Occident. Les deux modèles (géocentrisme et héliocentrisme) sont discutés et comparés dans l'ouvrage de **Galilée** (1564 – 1642), *dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (dialogue sur les deux grands systèmes du monde). Cet ouvrage publié en 1632 déclenche une très vive polémique. Galilée, qui n'est pas homme de compromis, y soutient ouvertement et sans réserve l'héliocentrisme. Il y ridiculise aussi ceux qui croient en la vision simpliste d'une Terre immobile au centre du cosmos, telle qu'elle est alors enseignée de façon dogmatique par l'Église, fidèle à Aristote. Or l'autorité de ce philosophe est encore extrêmement influente à cette époque. Galilée est donc contraint de se rétracter publiquement en 1633.

1.2 Les lois de Kepler

Tycho Brahe (1546–1601), observateur rigoureux, amasse sur une période de vingt ans, une quantité immense de données sur le mouvement des planètes, notamment sur Mars [3]. Exploitant ces données, et après six années d'un dur labeur accompagné de longs errements, Johannes **Kepler** (1571 – 1630) [4] découvre que l'orbite de Mars n'est finalement pas circulaire, mais elliptique. C'en est fini du second principe du géocentrisme. Dans son ouvrage *Astronomia Nova*, paru en 1608, il énonce de façon empirique les deux lois suivantes :
Loi des orbites : les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil (supposé fixe) occupe l'un des foyers (fig. 1.1).
Loi des aires : le rayon-vecteur qui relie le Soleil S à une planète P balaie des aires égales en des temps égaux (fig. 1.2). La planète P ne se déplace pas avec une vitesse constante le long de son orbite. Plus elle est près du Soleil, plus son mouvement est rapide. Elle parcourt le trajet AB dans le même intervalle de temps que le trajet CD.

---

1. Il s'agit en fait d'une renaissance car dès l'Antiquité, Aristarque de Samos (vers 280 av. J.-C.) avait déjà contesté la fixité de la Terre et fait l'hypothèse que celle-ci tournait autour du Soleil ; mais cette suggestion est rapidement tombée dans l'oubli (Archimède, 287 – 212 av. J.-C., critique les idées émises par Aristarque dans son traité l'Arénaire). L'héliocentrisme va ressurgir cependant tout au long des siècles. Par exemple, Âryabhata, astronome et mathématicien indien (474 – 550) et Al-Tusi, astronome et philosophe perse (1201 – 1274) soutiennent que la Terre est en mouvement et tourne autour du Soleil.

2. du grec $\pi\lambda\alpha\nu\grave{\eta}\tau\varsigma$, astre errant. Les planètes se déplacent à travers les constellations, contrairement aux étoiles dont la position sur la voûte céleste paraît immuable.

3. Tycho Brahe observait à l'œil nu avec des instruments (compas de très grande taille) qu'il avait fait réaliser. Ses observations, d'une précision d'une minute d'arc, restèrent inégalées jusqu'à l'invention du télescope à miroir en 1663 par James Gregory.

4. Précisons que Kepler a été l'assistant de Tycho-Brahe, durant quelques mois entre juin 1600 et le mois d'octobre de l'année suivante. Il lui succède ensuite comme mathématicien impérial auprès de l'empereur Rodolphe qui siégeait à Prague.

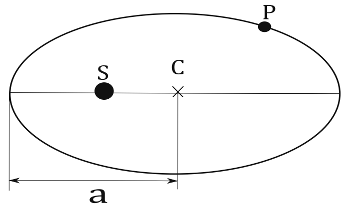

Figure 1.1

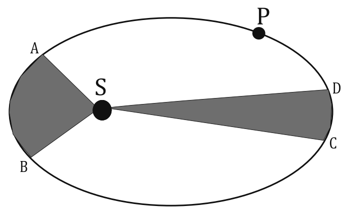

Figure 1.2

Une troisième loi est énoncée dans un second ouvrage, *Harmonices Mundi* (1618).
Loi des périodes : le carré de la période de révolution T d'une planète est proportionnel au cube du demi-grand axe a de l'orbite

$$\frac{T^2}{a^3} = k \tag{1.1}$$

où k est une constante, la même pour les six planètes du système solaire, connues à l'époque de Kepler.

1.3 Newton et la loi d'attraction universelle

Il faut attendre 1684, pour que le génie d'**Isaac Newton** (1642−1727) parvienne enfin à expliquer ces trois lois sur la base des principes fondamentaux de la mécanique. La parution en 1687 de son ouvrage majeur *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* marque un tournant dans l'histoire des sciences. Newton y énonce notamment les lois générales régissant le mouvement des corps.

Principe de l'inertie

Tout corps persévère dans l'état de mouvement rectiligne et uniforme (ou de repos) dans lequel il se trouve, à moins qu'une action mécanique (une force) n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état.
L'exemple le plus simple de corps est celui de **point matériel**, c'est-à-dire une particule, supposée sans volume, et dotée d'une propriété appelée **inertie**

ou **masse** (invariable en mécanique newtonienne). Pour pouvoir caractériser le mouvement d'un point matériel M, on introduit un **repère** d'origine O et visualisé par trois axes non-coplanaires (mais orientés de façon arbitraire dans l'espace), soit $Ox,\ Oy,\ Oz$. Les coordonnées de M sont alors désignées par x, y, z. On adjoint également une horloge débitant un temps t uniforme. On définit ainsi un référentiel d'étude (repère + horloge). Un **référentiel inertiel** ou galiléen est un référentiel privilégié dans lequel le principe de l'inertie est vérifié. Il existe une infinité de référentiels inertiels en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres.

Principe de la dynamique

Désignons par m la masse d'un point matériel M. Soit $\overrightarrow{OM}$ le rayon-vecteur repérant ce point. Soit $\overrightarrow{v}$ sa vitesse mesurée dans un référentiel inertiel. Elle est définie par $\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$. On appelle **quantité de mouvement** le produit de la masse par la vitesse, soit $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$. La dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement est égale à la force $\overrightarrow{F}$ exercée sur M [5], soit

$$\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \overrightarrow{F} \tag{1.2}$$

Principe des actions réciproques

Soit deux particules 1 et 2. La particule 1 exerce sur la particule 2 une force $\overrightarrow{F}_{1\longrightarrow 2}$ et réciproquement la particule 2 exerce sur la particule 1 une force $\overrightarrow{F}_{2\longrightarrow 1}$. On a

$$\overrightarrow{F}_{1\longrightarrow 2} = -\overrightarrow{F}_{2\longrightarrow 1} \tag{1.3}$$

La loi d'attraction universelle

Dans son traité, Newton adjoint la loi d'attraction universelle permettant d'expliquer aussi bien la chute des corps que les mouvements célestes : une particule M_1 de masse m_1 exerce sur une particule M_2 de masse m_2 une force donnée par la relation

$$\overrightarrow{F}_{1\longrightarrow 2} = -Gm_1m_2\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{{M_1M_2}^3} \tag{1.4}$$

5. S'il y a plusieurs forces $\overrightarrow{F}_{i=1,2,...}$, qui agissent sur M, on effectue la somme vectorielle $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + ...$ (résultante des forces).

Pour alléger l'écriture, on pose généralement $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{OM_2}$ (on rappelle la relation de Chasles $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$). Il vient

$$\overrightarrow{F}_{1\to 2} = -Gm_1m_2\frac{\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}}{\|\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}\|^3} \tag{1.5}$$

La force exercée sur une particule test localisée au point P, de masse m, par un système composé de N points matériels $M_{i=1,2,\ldots,N}$ de masses $m_{i=1,2,\ldots,N}$, est la résultante des forces individuelles produites par chaque point M_i agissant sur P (principe de superposition linéaire). Si on affecte une masse unité à la particule test, on définit le **champ gravitationnel** $\overrightarrow{A}$ produit par le système au point P, repéré par le rayon-vecteur $\overrightarrow{r}$

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) = -G\sum_i m_i \frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_i}}{\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_i}\|^3} \tag{1.6}$$

La sommation de vecteurs étant une opération relativement peu aisée, on introduit plus volontiers la fonction scalaire suivante, appelé **potentiel gravitationnel**[6].

$$\phi(\overrightarrow{r}) = -G\sum_i m_i \frac{1}{\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_i}\|} \tag{1.7}$$

et l'on peut montrer que

$$\overrightarrow{A} = -grad\phi \tag{1.8}$$

On dit que $\overrightarrow{A}$ dérive d'un potentiel scalaire ϕ. Le symbole $grad$ désigne l'opérateur gradient[7].

Si les masses forment un continuum (milieu lissé), on doit passer de la somme discrète ci-dessus à une intégrale. Il s'agit d'une opération mathématique assez délicate ; mais d'un point de vue pratique, elle consiste simplement à étaler toute masse ponctuelle m_i dans un petit volume élémentaire, autour du point considéré M_i. On supprime alors l'indice discret i : la masse m_i devient la masse élémentaire dm et l'on renomme $\overrightarrow{r_i}$ par un vecteur non-indicé, $\overrightarrow{\sigma}$, repérant le point courant du système. On a ainsi

6. Le concept de potentiel a été introduit par Daniel Bernoulli, 1738 ; Alexis Clairaut, 1743 ; Joseph Louis Lagrange, 1773. Depuis, cette idée remarquable s'est répandue dans le monde de la physique.

7. En coordonnées cartésiennes x, y, z, les trois composantes de cet opérateur vectoriel sont fabriquées à partir des trois opérateurs dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$. Introduisant la base orthonormée $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, on a $grad \equiv \overrightarrow{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{k}\frac{\partial}{\partial z}$.

$$\phi(\overrightarrow{r}) = -G \int dm \frac{1}{\| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{\sigma} \|} \tag{1.9}$$

Champ de gravitation produit par un corps sphérique homogène

Le champ $\overrightarrow{A}$ produit par une distribution de matière, qui ne possède pas de symétrie particulière, peut être très compliqué à déterminer (fig. 1.3.a).

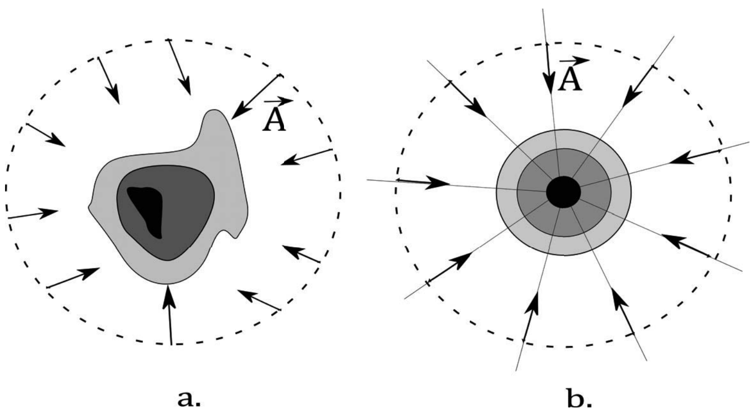

Figure 1.3

Il n'est simple que dans un cas, celui où la masse du système attracteur est à symétrie sphérique (fig. 1.3.b). Dans cette situation le champ gravitationnel $\overrightarrow{A}$ est purement radial et son unique composante $A(r)$ ne dépend que de r et de r seulement

$$\overrightarrow{A} = A(r) \frac{\overrightarrow{r}}{r} \tag{1.10}$$

et

$$A(r) = -\frac{d\phi}{dr} \tag{1.11}$$

Soit une coquille sphérique homogène, infiniment mince, de rayon u, de masse dm et de centre O. On démontre que le champ de gravitation produit en un point P par cette coquille est (fig. 1.4)

i. Si P est situé à l'intérieur de la coquille ($r < u$), le champ gravitationnel est identiquement nul $\overrightarrow{A} \equiv \overrightarrow{0}$ [8].

ii. Si P est situé à l'extérieur de la coquille ($r > u$), il s'écrit (en posant $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$)

$$\overrightarrow{A} = -Gdm\frac{\overrightarrow{r}}{r^3} \tag{1.12}$$

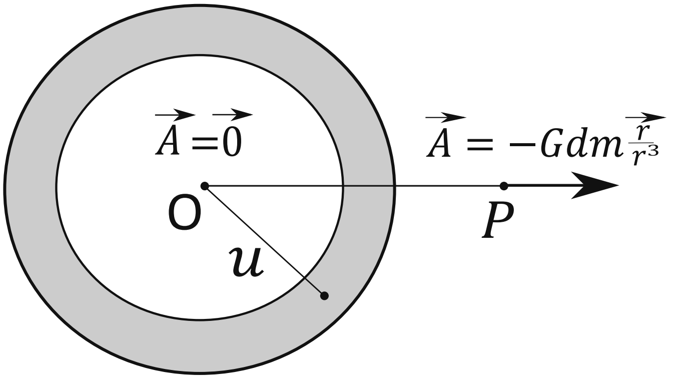

Figure 1.4

On peut ainsi énoncer le résultat très important :

Une coquille sphérique homogène agit à l'extérieur comme si toute la matière la composant était concentrée en son centre.

Un corps sphérique, homogène, de masse volumique ρ, de rayon R et de masse M, est un empilement de telles coquilles concentriques dont le rayon u varie de 0 à R. Pour $r > R$, il vient ($\mathsf{M} = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$)

$$\phi(r) = -G\frac{\mathsf{M}}{r} \qquad \overrightarrow{A} = -G\mathsf{M}\frac{\overrightarrow{r}}{r^3} \tag{1.13}$$

À l'intérieur du corps ($r < R$), en un point situé à la distance r de l'origine, le champ gravitationnel est

8. L'astronome E. Halley a émis l'hypothèse en 1682 que la Terre pourrait être une coquille creuse, dont il évaluait l'épaisseur à 800 km. Notons que la force gravitationnelle est nulle à l'intérieur d'une coquille sphérique et homogène. D'éventuels êtres qui s'y trouveraient seraient donc en état d'impesanteur. En fait cette idée est tombée rapidement en désuétude. En effet si tant est que l'on puisse former une telle structure en coquille, les forces de marée dues aux autres astres (Soleil, Lune, etc) la disloqueraient rapidement ; les débris se condenseraient alors pour former une sphère pleine à configuration d'énergie minimale.

$$A\left(r\right)=-G\frac{m(r)}{r^2} \tag{1.14}$$

où $m(r)=\frac{4\pi}{3}\rho r^3$ est la masse contenue à l'intérieur de la sphère de rayon r. Il vient

$$A\left(r\right)=-\frac{4\pi}{3}G\rho r \tag{1.15}$$

Le potentiel s'en déduit aussitôt

$$\phi\left(r\right)=\frac{2\pi}{3}G\rho r^2+Cte \tag{1.16}$$

La constante est déterminée en exprimant la continuité du potentiel en $r=R$, soit

$$\phi\left(r=R-0\right)=\ \phi\left(r=R+0\right) \tag{1.17}$$

ou, explicitement

$$\frac{2\pi}{3}G\rho R^2+Cte=-G\frac{\mathsf{M}}{R} \tag{1.18}$$

On obtient $Cte=-2\pi G\rho R^2$ et finalement lorsque $r<R$

$$\phi\left(r\right)=\frac{2\pi}{3}G\rho(r^2-3R^2) \tag{1.19}$$

La fonction $\phi\left(r\right)$ forme un **puits de potentiel** qui emprisonne la particule (fig. 1.5).

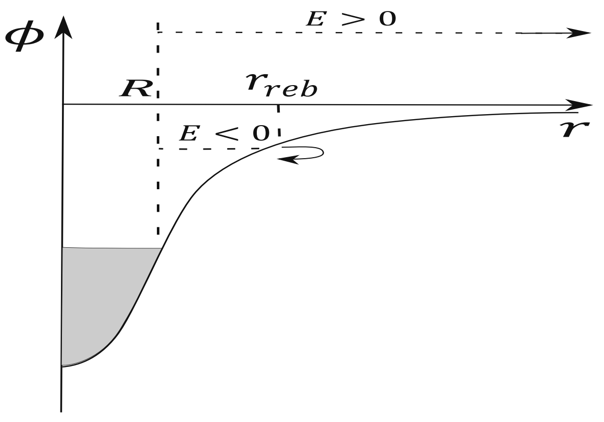

Figure 1.5