

► **X 1** ——— Localisation des racines d'un polynôme

On considère le polynôme  $P(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $0 < b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n$  des réels. On note :

$$Q(X) = (X - 1)P(X).$$

Soit  $z$  une racine complexe de  $P$ , montrer que  $Q(|z|) \leq 0$ , en déduire que  $|z| \leq 1$ .

▷ **Réponse**

• Remarquons que :

$$\begin{aligned} Q(X) &= \sum_{k=0}^n b_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^n b_k X^k \\ &= b_n X^{n+1} + \sum_{k=1}^n (b_{k-1} - b_k) X^k - b_0 \end{aligned} \quad (*)$$

donc

$$Q(|z|) = b_n |z|^{n+1} + \sum_{k=1}^n (b_{k-1} - b_k) |z|^k - b_0 \quad (**)$$

Or  $Q(z) = (z - 1)P(z) = 0$  donc par (\*)

$$b_n z^{n+1} = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) z^k + b_0.$$

En prenant l'inégalité triangulaire, avec les hypothèses sur les  $b_k$  :

$$\begin{aligned} b_n |z|^{n+1} &\leq \sum_{k=1}^n \overbrace{|b_k - b_{k-1}|}^{\geq 0} |z|^k + |b_0| \\ &\leq \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) |z|^k + b_0. \end{aligned}$$

Cette inégalité, avec (\*\*), donne exactement que  $Q(|z|) \leq 0$ . On en déduit que  $(|z| - 1)P(|z|) \leq 0$  et comme  $P(|z|) \geq b_0 > 0$  on a bien  $|z| - 1 \leq 0$ .

► **MINES 2** ——— Construction d'un polynôme

Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{R}_7[X]$  tels que  $(X - 1)^4$  divise  $P(X) + 1$  et  $(X + 1)^4$  divise  $P(X) - 1$ .

▷ **Réponse**

• *Condition nécessaire.* Soit  $P$  un tel polynôme. Remarquons que  $(X - 1)^3$  et  $(X + 1)^3$  divisent  $P' \in \mathbb{R}_6[X]$  donc il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$P'(X) = \lambda(X^2 - 1)^3 \quad \text{donc} \quad P(X) = \lambda \left[ \frac{X^7}{7} - 3\frac{X^5}{5} + X^3 - X \right] + \mu, \mu \in \mathbb{R}.$$

• *Est-ce suffisant ?* Si  $P$  est ainsi, alors :

## 1 POLYNÔMES

- >  $\forall k \in \llbracket 1 ; 3 \rrbracket, P^{(k)}(\pm 1) = 0$  par construction ;
- >  $P$  convient donc si et seulement si 1 est racine de  $P(X) + 1$  et  $-1$  racine de  $P(X) - 1$ , ce qui fournit deux équations sur  $(\lambda, \mu)$ . On trouve  $\lambda = \frac{35}{16}$  et  $\mu = 0$ , soit un unique polynôme convenable :

$$P(X) = -\frac{35}{16}X + \frac{35}{16}X^3 - \frac{21}{16}X^5 + \frac{5}{16}X^7.$$

### ► MAPLE 3 Racine cubique d'un polynôme

Trouver les polynômes  $P(X) \in \mathbb{R}[X]$  tels que :

$$(P(X))^3 = 27X^9 + 54X^7 - 54X^6 + 36X^5 - 72X^4 + 44X^3 - 24X^2 + 24X - 8.$$

#### ▷ Réponse

- S'il existe,  $P(X)$  est nécessairement de degré 3. On déclare un tel polynôme à MAPLE, on l'élève au cube et on lui retranche le second membre :



```
> P:=sum(a[i]*X^i,i=0..3);
      P := a0 + a1X + a2X2 + a3X3
> Q:=expand(P^3-27*X^9+54*X^7-54*X^6+36*X^5-72*X^4
> +44*X^3-24*X^2+24*X-8);
```

Il reste à voir lorsque  $Q$  est nul. On extrait ses coefficients et l'on cherche lorsqu'ils sont nuls :



```
> eqns:=seq(coeff(Q,X,i),i=0..9);
eqns := 8 + a03, -24 + 3 a02 a1, 24 + 3 a02 a2 + 3 a0 a12, 6 a0 a1 a2 + a13 - 44
+ 3 a02 a3, 6 a0 a1 a3 + 72 + 3 a12 a2 + 3 a0 a22, 6 a0 a2 a3 - 36 + 3 a12 a3
+ 3 a1 a22, 6 a1 a2 a3 + 54 + a23 + 3 a0 a32, -54 + 3 a1 a32 + 3 a22 a3, 3 a2 a32,
a33 - 27
> solve({eqns});
{a0 = -2, a1 = 2, a2 = 0, a3 = 3}, {a0 = -2 RootOf(_Z2 + _Z + 1, label = _L3),
a1 = 2 RootOf(_Z2 + _Z + 1, label = _L3), a2 = 0,
a3 = 3 RootOf(_Z2 + _Z + 1, label = _L3)}
```

En se limitant à la seule solution réelle, on trouve :



```
> allvalues({%});
{{a0 = 1 - √3 I, a1 = -1 + √3 I, a3 = -3/2 + 3/2 I √3, a2 = 0},
{a0 = -2, a1 = 2, a2 = 0, a3 = 3}}
, {{a3 = -3/2 - 3/2 I √3, a0 = 1 + √3 I, a1 = -1 - √3 I, a2 = 0},
{a0 = -2, a1 = 2, a2 = 0, a3 = 3}}
> subs({a[0] = -2, a[1] = 2, a[2] = 0, a[3] = 3},P);
-2 + 2 X + 3 X3
```

► **CENTRALE 4** — *Equations linéaires portant sur des polynômes*

Soit  $Q \in \mathbb{R}[X]$  donné. Discuter des solutions dans  $\mathbb{R}[X]$  de l'équation :

$$(E_1) : P(X) + P(X - 1) = Q(X),$$

puis de l'équation :

$$(E_2) : P(X) + P(1 - X) = Q(X).$$

▷ **Réponse**

- Pour l'équation  $(E_1)$ , on introduit l'endomorphisme

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto P(X) + P(X - 1) \end{cases}$$

de  $\mathbb{R}[X]$ . Alors :

$$(E_1) \iff u(P) = Q,$$

donc  $(E_1)$  est en fait une *équation linéaire*. Ici, on va montrer que  $u$  est bijectif, elle aura donc une unique solution.

➤ *Preuve de l'injectivité de  $u$ .* Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P \in \text{Ker}(u)$  donc :

$$P(X) + P(X - 1) = 0 \quad (*)$$

Si  $P$  n'est pas nul, de monôme dominant  $aX^n$  avec  $a \neq 0$ , alors  $P(X) + P(X - 1)$  a pour monôme dominant  $2aX^n$ , ce qui est contradictoire puisqu'il est nul. Donc  $P$  est nul, c'est-à-dire que  $\text{Ker}(u)$  est réduit à  $\{0\}$  et  $u$  est injective.

➤ *Preuve de la surjectivité de  $u$ .* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'espace  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $u$ , et il est de dimension finie. L'endomorphisme induit par  $u$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$  est donc un automorphisme : tout polynôme de degré  $n$  a un antécédent par  $u$ , donc  $u$  est surjective.

- Grâce à la bijectivité de  $u$  on peut conclure :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \exists ! P \in \mathbb{R}[X], P(X) + P(X - 1) = Q(X).$$

- Pour l'équation  $(E_2)$  on introduit cette fois l'endomorphisme :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto P(X) + P(1 - X) \end{cases}$$

donc :  $(E_2) \iff u(P) = Q$  qui reste une équation linéaire. D'après le cours, l'ensemble  $\mathcal{S}$  de ses solutions est soit vide, soit du type

$$\mathcal{S} = \{P_k + P_p, P_k \in \text{Ker}(u)\} \quad (**)$$

où  $P_p$  désigne une solution particulière de  $(E_2)$ . Ici, l'injectivité et la surjectivité de  $u$  ne sont plus claires comme dans le cas précédent, on doit travailler un peu plus pour conclure...

- Nous allons chercher une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution particulière  $P_p$  à  $(E_2)$ .

➤ *Condition nécessaire* à l'existence de  $P_p$  tel que  $P_p(X) + P_p(1 - X) = Q(X)$ . Si un tel polynôme existe, alors on observe que

$$Q(1 - X) = P_p(1 - X) + P_p(1 - (1 - X)) = Q(X).$$

Donc  $Q$  satisfait nécessairement  $Q(X) = Q(1 - X)$ .

➤ *Est-ce suffisant ?* Si  $Q(X) = Q(1 - X)$  alors on a bien  $u(P_p) = Q$  en posant :

$$P_p(X) = \frac{Q(X)}{2}.$$

1 POLYNÔMES

• *Finalement :*

➤ si  $Q(X) \neq Q(1-X)$  alors  $(E_2)$  n'a pas de solution.

➤ sinon, le polynôme  $P_p(X) = \frac{Q(X)}{2}$  est une solution particulière. Conformément à (\*), on doit examiner le noyau de l'application  $u$  déjà donnée :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad (P \in \text{Ker}(u)) \iff (P(X) = -P(1-X)) \quad (***)$$

En introduisant  $Q(X) = P(X + 1/2)$  on trouve que (\*\*\*) équivaut à

$$Q(X) = -Q(-X)$$

soit au fait que  $Q(X)$  soit impair. Donc  $Q(X)$  admet une écriture du type :

$$Q(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k X^{2k+1},$$

où  $(b_k)_k$  est une suite nulle à partir d'un certain rang. Donc

$$P(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k (X - 1/2)^{2k+1},$$

où  $(b_k)_k$  est une suite nulle à partir d'un certain rang.

• En conclusion, et conformément à (\*\*):

➤ **Cas 1 :** si  $Q(1-X) \neq Q(X)$  alors  $(E_2)$  n'a pas de solution.

➤ **Cas 2 :** si  $Q(X) = Q(1-X)$ , alors l'ensemble des solutions de  $(E_2)$  est exactement l'ensemble des polynômes du type :

$$\frac{Q(X)}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k (X - 1/2)^{2k+1},$$

$(b_k)_k$  étant une suite nulle à partir d'un certain rang.

► **CENTRALE 5** **Factorisation d'un polynôme**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $P(X) = (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}$ .

a) Déterminer le terme dominant de  $P(X)$ .

b) Prouver que les racines de  $P(X)$  sont les :  $\cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$  pour  $k \in \llbracket 1 ; 2n \rrbracket$ .

c) Factoriser  $P(X)$  sur  $\mathbb{C}[X]$ , en déduire la valeur du produit  $\prod_{k=1}^n \left(4 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$ .

▷ **Réponse**

• Par le binôme de Newton, on remarque tout d'abord que le terme dominant de ce polynôme est  $2i(2n+1)X^{2n}$ .

• Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On remarque que  $z = i$  n'est pas racine de  $P$ , on suppose donc  $z \neq i$  alors :

$$P(z) = 0 \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1 \iff \exists k \in \llbracket 0 ; 2n+1 \rrbracket, \frac{z+i}{z-i} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right).$$

L'égalité précédente équivaut à :

$$z \left(1 - \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)\right) = (-i) \left(1 + \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)\right).$$

1 POLYNÔMES

La valeur  $k = 0$  est à exclure car elle mène à  $0 = -2i$ , on peut donc diviser :

$$z = (-i) \frac{1 + \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)}{1 - \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)} = \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

par les formules d'Euler. On peut donc factoriser, en notant  $x_k = \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$  :

$$P(X) = 2i(2n+1) \prod_{k=1}^{2n} (X - x_k).$$

On remarque que  $x_{2n+1-k} = -x_k$  donc en regroupant les facteurs du produit :

$$P(X) = 2i(2n+1) \prod_{k=1}^n \left( X^2 - \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \right) \quad (*)$$

On utilise maintenant que, d'une part :

$$P(2i) = (3i)^{2n+1} - i^{2n+1} = (3^{2n+1} - 1) \times i \times (-1)^n \quad (**).$$

Par (\*), on trouve :

$$P(2i) = 2i(2n+1) \times (-1)^n \times \prod_{k=1}^n \left( 4 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \right).$$

En comparant à (\*\*):

$$\prod_{k=1}^n \left( 4 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \right) = \frac{3^{2n+1} - 1}{2(2n+1)}.$$

► **CENTRALE 6** — *Représentation intégrale des coefficients*

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  et  $A = \left\{ P \in E, \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{it})| dt \leq 1 \right\}$ . Montrer que la fonction

$$f : P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X] \mapsto \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$$

est bornée sur  $A$ .

► **Réponse**

- *Remarque* : la somme définissant  $P$  et le max de l'énoncé ont bien un sens puisque, si  $P$  est un polynôme, la suite  $(a_k)_k$  est nulle à partir d'un certain rang.
- L'exercice passe par une représentation intégrale des coefficients :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{it}) e^{-ikt} dt,$$

1 POLYNÔMES

cas particulier de la Formule de Cauchy (sur les séries entières) étudiée à l'exercice 19 page 408.

Pour la prouver, il suffit d'écrire, si  $P = \sum_{j=0}^n a_j X^j$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{it}) e^{-ikt} dt &= \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{e^{i(j-k)t}}^{2\pi\delta_j^k} dt \\ &= a_k \end{aligned}$$

Grace à cette relation, si  $\int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{it})| dt \leq 1$  alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, |a_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{it})| \overbrace{|e^{-ikt}|}^{=1} dt \leq \frac{1}{2\pi}.$$

On peut passer au max dans cette inégalité, d'où le résultat.

► **X 7** ——— Une conséquence du théorème de Lucas

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ , non constant, tel que toutes ses racines ont une partie réelle strictement positive. Montrer qu'il en va de même pour les racines de  $P'$ .

**Remarque :** plus généralement, on peut montrer que les racines complexes de  $P'$  sont dans l'enveloppe convexe de celles de  $P$ , c'est-à-dire dans l'intersection de tous les ensembles convexes qui contiennent toutes les racines de  $P$ . C'est le *théorème de Lucas*, dont la preuve utilise aussi la relation (\*) de la correction de cet exercice.

▷ **Réponse**

• Notons

$$P(X) = \alpha \prod_{j=1}^p (X - z_j)^{m_j}$$

avec  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ,  $m_j \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{Re}[z_j] > 0$  par hypothèse. Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $P'(z) = 0$ .

► **Cas 1 :**  $P(z) = 0$ . Alors  $z$  est l'un des  $z_j$  donc  $\text{Re}[z] > 0$ .

► **Cas 2 :**  $P(z) \neq 0$ . En dérivant  $P(X)$ , on trouve :

$$P'(X) = \alpha \sum_{j=1}^p \left( m_j (X - z_j)^{m_j-1} \prod_{i=1, i \neq j}^p (X - z_i)^{m_i} \right)$$

donc :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{z - z_j} \quad (*)$$

On introduit les écritures cartésiennes  $z = x + iy$  et  $z_j = \alpha_j + i\beta_j$  (donc  $\alpha_j > 0$  par hypothèse) alors la relation (\*) donne :

$$\sum_{j=1}^p \frac{(x - \alpha_j)m_j - im_j(y - \beta_j)}{(x - \alpha_j)^2 + (y - \beta_j)^2} = 0 \xrightarrow{\text{Re}} x = \frac{\sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j m_j}{(x - \alpha_j)^2 + (y - \beta_j)^2}}{\sum_{j=1}^p \frac{m_j}{(x - \alpha_j)^2 + (y - \beta_j)^2}} > 0.$$

## 1 POLYNÔMES

D'où le résultat dans tous les cas.

► **ENSAM 8** — *Application des relations coefficients/racines*

Trouver  $k \in \mathbb{C}$  tel que le polynôme

$$P(X) = X^4 - X^3 + kX^2 + 6X - 4$$

ait deux zéros de produit égal à 2, calculer le (ou les) polynôme(s) correspondant(s).

▷ **Réponse**

- *Remarque* : le sujet parle visiblement des racines *complexes* (sinon leur existence est déjà problématique).
- *Condition nécessaire*. Soit  $P$  un polynôme satisfaisant, il est scindé sur  $\mathbb{C}$ . On écrit :

$$P(X) = \prod_{i=1}^4 (X - \lambda_i),$$

avec (quitte à permuter les racines)  $\lambda_1 \times \lambda_2 = 2$ . Alors  $P(X)$  admet une factorisation du type :

$$P(X) = (X^2 + \alpha X + 2)(X^2 + \beta X - 2)$$

avec  $\alpha = -\lambda_1 - \lambda_2$  et  $\beta = -\lambda_3 - \lambda_4$ . En développant, on trouve

$$\alpha + \beta = -1, \beta - \alpha = 3, \alpha\beta = k$$

donc  $\beta = 1, \alpha = -2$  donc  $k = -2$ .

- *Est-ce suffisant ?* On vérifie que, pour  $k = -2$  :

$$P(X) = (X^2 + X - 2)(X - (1 + i))(X - (1 - i))$$

avec  $(1 + i)(1 - i) = 2$  : la condition  $k = -2$  est donc nécessaire et suffisante, on trouve alors :

$$P(X) = X^4 - X^3 - 2X^2 + 6X - 4.$$

► **X 9** — *Etude des racines d'un polynôme*

Soient  $n \geq 1$ ,  $Q \in \mathbb{R}[X]$  noté  $Q(X) = a_n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ . On suppose que tous les  $a_k$  sont strictement positifs pour  $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$ . Montrer que  $Q$  admet une unique racine dans  $]0, +\infty[$ .

▷ **Réponse**

Nous allons faire une récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Pour  $n = 1$ , le résultat est trivial,  $\frac{a_0}{a_1}$  est l'unique racine de  $Q$  sur  $]0, +\infty[$ .
- Supposons le résultat au rang  $n$ . Soit  $Q(X) = a_{n+1} X^{n+1} - \sum_{k=0}^n a_k X^k$  avec tous les  $a_k$  strictement positifs pour  $k \in \llbracket 0 ; n + 1 \rrbracket$ . On peut appliquer l'hypothèse de récurrence au rang  $n$  à  $Q'$ , qui possède donc une unique racine dans  $]0, +\infty[$ , notée  $\alpha$ . Comme  $Q'$  est de signe constant sur  $[0, \alpha]$  et  $Q'(0) < 0$ , on a  $Q' < 0$  dans  $]0, \alpha[$  et de même  $Q' > 0$  sur  $]\alpha, +\infty[$  par sa limite en  $+\infty$ . D'où le tableau :

1 POLYNÔMES

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$Q'(x)$	$< 0$	0	$> 0$
$Q(x)$	$Q(0) < 0$	$\searrow$ $Q(\alpha) < 0$	$\nearrow$

La fonction  $Q$  étant continue sur l'intervalle  $[\alpha, +\infty[$ , strictement croissante sur cet intervalle, elle induit une bijection de  $[\alpha, +\infty[$  sur  $[Q(\alpha), +\infty[$  : comme  $Q(\alpha) < 0$ , il existe un unique  $\beta > \alpha$  tel que  $Q(\beta) = 0$ . Comme  $Q < 0$  sur  $[0, \alpha]$ ,  $\beta$  est l'unique racine de  $Q(X)$  dans  $]0, +\infty[$ , d'où le résultat au rang  $n + 1$ , et la preuve par récurrence.

► MINES 10 L'une des racines est le produit des deux autres

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients d'un polynôme unitaire de degré 3 pour que le carré de l'une de ses racines soit le produit des deux autres.

▷ **Réponse**

• Notons  $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ .

• *Condition nécessaire.* Supposons qu'il existe  $(\lambda, \alpha, \beta) \in \mathbb{C}^3$  tel que  $\lambda^2 = \alpha\beta$  et :

$$P(X) = (X - \lambda)(X - \alpha)(X - \beta).$$

Par les relations coefficients/racines, avec la relation précédente :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \lambda + \alpha + \beta = -a \\ \lambda^2 + \lambda(\alpha + \beta) = b \\ \lambda^3 = -c \end{cases} \\ \implies & \begin{cases} \alpha + \beta = -a - \lambda \\ \lambda^2 - \lambda(a + \lambda) = b \\ \lambda^3 = -c \end{cases} \\ \implies & \begin{cases} \alpha + \beta = -a - \lambda \\ -\lambda a = b \\ \lambda^3 = -c \end{cases} \\ \implies & ca^3 = b^3 \quad (*) \end{aligned}$$

en élevant au cube la seconde équation dans le dernier système.

• *Est-ce suffisant ?* Réciproquement, si (\*) est vérifiée. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que :

$$\lambda^3 = -c \quad (**)$$

Alors (\*) donne  $b^3 = (-\lambda a)^3$  donc, en notant  $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$ , on a  $b \in \{-\lambda a, -j\lambda a, -j^2\lambda a\}$ .

Quitte à changer  $\lambda$  en  $j\lambda$  ou  $j^2\lambda$  (la condition (\*\*)) restera vérifiée), on peut supposer que

$$b = -\lambda a \quad (***)$$

Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  tel que :

$$(X - \alpha)(X - \beta) = X^2 + (a + \lambda)X + \lambda^2,$$

ce qui assure que :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a - \lambda \\ \alpha\beta = \lambda^2 \end{cases} \quad (***)$$