

Table des matières

1	Polynômes	11
	X. Localisation des racines d'un polynôme	12
	<i>Mines.</i> Construction d'un polynôme	12
	<i>MAPLE.</i> Racine cubique d'un polynôme	13
	<i>Centrale.</i> Equations linéaires portant sur des polynômes	14
	<i>Centrale.</i> Factorisation d'un polynôme	15
	<i>Centrale.</i> Représentation intégrale des coefficients	16
	X. Une conséquence du théorème de Lucas	17
	<i>Ensam.</i> Application des relations coefficients/racines	18
	X. Etude des racines d'un polynôme	18
	<i>Mines.</i> L'une des racines est le produit des deux autres	19
	<i>Mines.</i> Equation polynomiale	20
	X. Dérivées reliées à des polynômes	21
	<i>Classique.</i> Polynômes scindés	23
	X. Polynômes scindés	24
	<i>Classique.</i> Polynômes de Legendre	25
	<i>Classique.</i> Polynômes de Hilbert, fractions associées	27
	X. Polynômes de Tchebycheff	28
	X. Polynômes positifs	31
	<i>Centrale.</i> Irrationalité de l'exponentielle d'un rationnel non nul	32
2	Algèbre linéaire, matrices	35
	<i>Mines.</i> Etude d'un rang	36
	<i>Centrale.</i> Base d'un hyperplan	36
	<i>Centrale.</i> Trace d'un endomorphisme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	37
	<i>Mines.</i> Supplémentaire commun	37
	<i>Classique.</i> Produit d'endomorphismes nilpotents qui commutent	38
	<i>Classique.</i> Nilpotents	39
	<i>Classique.</i> Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	40
	<i>Classique.</i> Semblables sur \mathbb{C} , sur \mathbb{R}	41
	<i>Ensam.</i> Liberté des $X_i^t Y_j$	41
	<i>MAPLE.</i> Construction de matrices	42
	X. Equation matricielle sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$	43
	X. Application de Taylor aux polynômes	43
	<i>Classique.</i> Noyaux itérés	44
	<i>Mines.</i> Caractérisation de certaines matrices	46
	<i>Centrale.</i> Si $AB - BA = B\dots$	47
	<i>Centrale.</i> Un produit qui est un projecteur	48
	<i>Centrale.</i> Ecriture en une somme selon le rang	48
	<i>Mines.</i> Matrices positives	49
	X. Espaces de polynômes stables par la dérivation	50
	<i>Centrale.</i> Etude d'un groupe multiplicatif de matrices	51
	<i>Classique.</i> Indice de nilpotence en dimension finie	52
	<i>Classique.</i> Applications de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ conservant le produit	53
	<i>Mines.</i> Dualité sur un espace de polynômes	54
	<i>Ensam.</i> Equation $A = \text{com}(A)$	55
	<i>Centrale.</i> Racines n -èmes d'un endomorphisme	56
	<i>Classique.</i> Matrices compagnon et commutant d'un cyclique	57
	X. Groupes multiplicatifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	59
	X. Nombre moyen de point fixes d'une permutation	60

3	Déterminants	63
	<i>Centrale.</i> Spectre et déterminant	64
	<i>Mines.</i> Positivité d'un déterminant par bloc	64
	<i>Classique.</i> Déterminant par blocs	65
	<i>Classique.</i> Déterminant tridiagonal	65
	<i>Classique.</i> Déterminant par blocs	66
	<i>Centrale.</i> Calcul d'un déterminant lié à un polynôme	66
	<i>Mines.</i> Inversion d'une matrice à paramètre	68
	<i>Mines.</i> Dériver pour trouver	69
	<i>Classique.</i> Déterminant circulant	70
	X. Somme des cofacteurs d'une matrice antisymétrique	71
	<i>Classique.</i> Déterminant des $ a_i - a_j $	71
	<i>Mines.</i> Dualité	72
	<i>Mines.</i> Déterminant par une réduction	73
	<i>Mines.</i> Calcul d'un déterminant par changement de base	74
	X. Déterminant de la transposition	74
	<i>Centrale.</i> Calcul d'un déterminant	75
	X. Inversibilité et déterminant	76
	<i>Classique.</i> Déterminants de Vandermonde, applications	77
	<i>Centrale.</i> Déterminants dans des ensembles particuliers de matrices	79
	<i>Classique.</i> Inverse de la matrice de Vandermonde	81
	<i>Classique.</i> Déterminants de Cauchy, de Hilbert	82
4	Réduction	85
	<i>Mines.</i> Polynôme annulateur	86
	X. Polynôme annulateur	86
	<i>Centrale.</i> Diagonalisabilité d'un produit tensoriel d'ordre 2	87
	<i>Classique.</i> Matrices à diagonale dominante	88
	<i>Classique.</i> Critère de non-diagonalisabilité sur \mathbb{C}	89
	<i>Mines.</i> Spectre d'une combinaison linéaire	90
	<i>Mines.</i> Stabilité par une matrice réelle	90
	<i>Ensam.</i> Diagonalisabilité par blocs	91
	<i>Classique.</i> Vecteurs propres de ${}^t\text{com}(A)$	91
	<i>Mines.</i> Equation aux éléments propres	92
	<i>Centrale.</i> Réduction d'une matrice à paramètres	93
	<i>MAPLE.</i> Construction d'une matrice à vecteurs propres donnés	95
	<i>Mines.</i> Recherche des éléments propres	96
	<i>Ensam.</i> Existence de solutions réelles à une équation matricielle	97
	X. Etude de projecteurs de même rang	98
	<i>Classique.</i> Eléments propres de MN , de NM	98
	X. Un endomorphisme sur les endomorphismes	100
	<i>Classique.</i> Réduction d'une matrice creuse	101
	<i>MAPLE.</i> Réduction d'une matrice à paramètres	102
	<i>MAPLE.</i> Réduction d'une matrice à paramètres	103
	<i>MAPLE.</i> Commutant d'une matrice à paramètres	107
	<i>Classique.</i> Que dire si $u \circ u$ est diagonalisable?	109
	<i>Classique.</i> Spectre de $Id_E - uv$ et $Id_E - vu$	111
	<i>Ensam.</i> Une étude de $\mathbb{C}[M]$	112
	<i>Classique.</i> Diagonalisation ou trigonalisation simultanée	113
	<i>MAPLE.</i> Etude d'un endomorphisme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	115
	<i>MAPLE.</i> Construction d'une matrice	116
	<i>Mines.</i> Etude d'une diagonalisabilité	117

<i>MAPLE</i> . Trigonalisation d'une matrice à paramètres	118
<i>Classique</i> . Commutant d'un endomorphisme diagonalisable	119
<i>Mines</i> . Diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$	121
X. Diagonalisabilité par blocs	122
X. Diagonalisabilité par blocs	123
<i>Mines</i> . Diagonalisabilité par blocs	124
<i>Classique</i> . Déterminant, réduction d'une matrice tridiagonale	125
<i>Mines</i> . Polynômes d'endomorphismes	127
X. Etude de $M \mapsto KM - ML$	129
<i>Centrale</i> . Suites récurrentes linéaires et vecteurs propres	132
5 Espaces préhilbertiens ou euclidiens	135
X. Somme de matrices et orthogonalité	136
<i>Mines</i> . Eléments propres d'une matrice	136
<i>Mines</i> . Produit scalaire et distance	137
<i>Mines</i> . Produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	138
<i>MAPLE</i> . Procédé de Gram-Schmidt	140
X. Minimisation d'une intégrale et projeté orthogonal	141
<i>Centrale</i> . Existence d'une base à coordonnées prescrites	142
<i>Ensam</i> . Les projecteurs qui raccourcissent les distances	144
<i>Classique</i> . Décomposition d'Iwasawa	145
<i>Classique</i> . Polynômes de Legendre	145
<i>Classique</i> . extremums d'une fonction sur les fonctions continues	147
<i>Mines</i> . Exemples d'orthogonaux	148
<i>Classique</i> . Polynômes de Laguerre	150
X. Itérées d'une composée de deux projecteurs	152
X. Construction d'une forme linéaire avec restriction	154
<i>Classique</i> . Polynômes orthogonaux associés à un poids	155
<i>Mines</i> . Un produit scalaire hermitien	158
<i>Classique</i> . Matrices de Gram	159
<i>Centrale</i> . Pseudo-solutions d'une équation linéaire	161
<i>Mines</i> . Stabilité de l'orthogonal par l'adjoint	162
X. Equation matricielle	162
<i>MAPLE</i> . Recherche de rotation	163
<i>Classique</i> . Racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif	165
<i>Centrale</i> . Sur l'adjoint	166
<i>Classique</i> . Décomposition polaire d'une matrice	166
<i>Mines</i> . Minimisation d'une forme quadratique	167
<i>Mines</i> . Condition suffisante de linéarité	168
<i>Ensam</i> . $A^t A$ et ${}^t A A$ sont orthogonalement semblables	168
<i>Mines</i> . Majoration du déterminant par la norme sup	169
<i>Ensam</i> . Nilpotence et nullité	170
<i>Centrale</i> . Matrice de rotation	170
<i>Centrale</i> . Conjugaison d'une rotation par une symétrie	171
<i>Mines</i> . Sous-espaces stables par un endomorphisme	172
<i>Ensam</i> . Trace et matrice orthogonale	173
<i>Mines</i> . Caractère défini positif d'une forme quadratique	174
<i>Centrale</i> . Comparaison des sphères unité de deux produits scalaires	174
<i>Centrale</i> . Matrice positive à termes non diagonaux strictement négatifs	175
<i>Centrale</i> . Matrices symétriques, antisymétriques et orthogonales	176
<i>Classique</i> . Endomorphismes et matrices antisymétriques	177
X. Majorations de déterminants	179

<i>Mines.</i> Méthode de Newton pour une racine carrée de matrice	181
<i>Classique.</i> Rayon spectral d'une matrice	182
<i>Classique.</i> Rayon spectral d'une matrice (suite)	184
X. Etude du cône isotrope d'une matrice	186
X. Caractérisation de certains endomorphismes	188
<i>Mines.</i> Endomorphisme autoadjoint sur $\mathbb{R}_n[X]$	190
6 Géométrie, courbes et surfaces	193
<i>Mines.</i> Etude d'une courbe en polaire	194
<i>Ensam.</i> Etude d'une courbe en coordonnées cartésiennes	194
<i>Classique.</i> Géométrie élémentaire dans l'espace	195
<i>Classique.</i> Réduction, tracé de coniques/quadrriques	196
<i>Centrale.</i> Etude d'une courbe paramétrée	197
<i>MAPLE.</i> Famille de courbes paramétrées	198
<i>Centrale.</i> Cylindre défini par génératrices et directrice	202
<i>Classique.</i> Orthoptique d'une parabole	203
<i>MAPLE.</i> Cordes d'une parabole	204
<i>Centrale.</i> Etude d'une courbe orthoptique	205
<i>Mines.</i> Courbe dans l'espace	206
<i>Centrale.</i> Aire d'un triangle construit sur une hyperbole	207
<i>Classique.</i> Courbe orthoptique de l'ellipse (cercle de Monge)	208
<i>Centrale.</i> Equation cartésienne d'un cône	209
<i>Centrale.</i> Ellipse inscrite dans un triangle de racines	211
<i>Classique.</i> Tracé du pentagone régulier à la règle et au compas	212
<i>MAPLE.</i> Ensemble de coniques à tangentes prescrites	214
X. Enveloppe d'une famille de droites	215
<i>MAPLE.</i> Tangentes communes à deux coniques	217
<i>Centrale.</i> Droites d'une quadrique tangentes à une sphère	218
<i>MAPLE.</i> Podaire de l'hyperboloïde	220
<i>Centrale.</i> Coniques et droites	223
7 Espaces vectoriels normés, suites	225
X. Suite de type $f(x_n) = n$	226
<i>Classique.</i> e est irrationnel	226
<i>Classique.</i> Lemme de Cesàro, application à $u_{n+1} = \sin(u_n)$	227
<i>Classique.</i> Cesàro (variante)	228
X. Divergence d'une suite	229
<i>MAPLE.</i> Suite récurrente d'ordre 1	230
<i>Centrale.</i> Equivalent de suites complexes	232
<i>Mines.</i> Suite récurrente d'ordre 2	233
<i>Ensam.</i> Suites récurrentes linéaires d'ordre 3	233
<i>Centrale.</i> Suite de matrices	235
<i>Centrale.</i> Limite de $\sin(2\pi n!e)$	236
X. Méthode de Jacobi	237
<i>Mines.</i> Un développement asymptotique	239
X. Norme et polynômes	240
X. Etude d'un endomorphisme sur l'espace des suites	241
<i>Mines.</i> Etude de l'équivalence de deux normes	242
<i>Classique.</i> Normes de Hölder	243
<i>Mines.</i> Norme subordonnée	245
X. Norme subordonnée	247
X. Comparaison de normes	248

8 Fonctions d'une variable réelle	251
<i>Centrale.</i> Utilisation d'une fonction auxiliaire	252
<i>Classique.</i> Point fixe d'une fonction $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$	252
<i>MAPLE.</i> Etude d'un prolongement	253
<i>Classique.</i> Convexité et signe	254
<i>Centrale.</i> Etude d'un maximum	254
X. Etude d'une inégalité	255
X. Une inéquation différentielle	255
<i>Classique.</i> Théorème de Darboux	256
<i>Classique.</i> Rolle à l'infini	256
<i>MAPLE.</i> Développement limité de l'inverse	257
<i>Mines.</i> Changements de signe	258
<i>Centrale.</i> Lemme de Croft	259
<i>Centrale.</i> Limite et développements limités	260
<i>Classique.</i> Equation fonctionnelle	261
X. Application à l'étude de limites de produits	262
<i>Mines.</i> Equation fonctionnelle	264
9 Intégration	267
<i>Classique.</i> Fonction intégrable et décroissante sur \mathbb{R}^+	268
<i>Mines.</i> Nature d'une intégrale impropre	268
<i>Centrale.</i> Nature d'une intégrale impropre	269
<i>Classique.</i> Calcul d'une intégrale impropre	270
<i>Classique.</i> Intégrales de Bertrand	270
<i>Centrale.</i> Une identité sur les intégrales	271
<i>Mines.</i> Méthode du point médian	272
<i>Centrale.</i> Calcul d'une intégrale impropre	273
<i>Mines.</i> Calcul d'une intégrale impropre	274
<i>Classique.</i> Une propriété géométrique de l'intégrale	275
<i>Mines.</i> Calcul d'une intégrale par ses sommes de Riemann	276
<i>Classique.</i> Permutation somme/intégrale	278
X. Sommes inverses de Riemann	279
<i>Classique.</i> Variante du lemme de Lebesgue	280
<i>Classique.</i> Sommes de Riemann généralisées	282
<i>Classique.</i> Intégration des relations de comparaisons	283
<i>Centrale.</i> Calcul d'intégrale impropre	285
X. Précision des sommes de Riemann	288
<i>Centrale.</i> Théorèmes abélien, taubérien et transformée de Laplace	289
X. Calcul d'une intégrale à deux paramètres	290
<i>Classique.</i> Transformée de Fourier de la loi normale	292
<i>Classique.</i> Intégrale à paramètre dans les bornes	294
<i>Mines.</i> Etude d'une suite d'intégrales	296
X. Limite puis équivalent d'une suite d'intégrales	297
<i>Mines.</i> Calcul d'une intégrale à paramètre	298
<i>Centrale.</i> Etude d'une suite d'intégrales	299
<i>Mines.</i> Etude d'une suite d'intégrales	301
<i>Centrale.</i> Régularité et équivalents intégrale à paramètre	301
<i>Centrale.</i> Suite récurrente et intégrales à paramètre	304
<i>Centrale.</i> Calcul d'une intégrale par convergence dominée	307
<i>Mines.</i> Calcul de l'intégrale de Gauss	308
<i>Classique.</i> Intégrale de Dirichlet via une intégrale à paramètre	310
X. Limites d'une intégrale à paramètre	312

X. Etude d'une suite d'intégrales à paramètres	314
X. Irrationalité de π^2	317
X. Limite d'intégrales à paramètre	319
10 Séries numériques	321
<i>Classique.</i> Séries de Bertrand	322
<i>Centrale.</i> Séries de même nature	323
<i>Ensam.</i> Suites récurrentes et séries	323
X. Suites récurrentes et séries	324
<i>Centrale.</i> Transformées d'une série numérique	325
<i>Classique.</i> Quelques sommes classiques	326
<i>MAPLE.</i> Convergence et somme d'une série à paramètres	326
<i>Mines.</i> Une somme moins classique	327
<i>Mines.</i> Une somme encore moins classique	328
<i>Classique.</i> Sommation des relations de comparaison	329
<i>Mines.</i> Sommes nulles d'une série numérique	331
<i>Mines.</i> Terme général intégral	332
<i>Classique.</i> Constante d'Euler	334
<i>Centrale.</i> Série et fonction Γ	336
<i>Classique.</i> Transformation d'Abel (sommutation par parties)	337
<i>Classique.</i> Produit infini : convergence, calcul	338
<i>Classique.</i> Preuve de la formule de Stirling par Wallis	339
<i>Centrale.</i> Sommation par paquets	340
<i>Mines.</i> Série définissant un endomorphisme sur les suites	341
X. Ecriture triadique d'un élément de $[0, 1[$	343
<i>Centrale.</i> Calcul d'une somme grâce à Stirling	344
X. Exponentielles de matrices d'ordre 2	345
<i>Classique.</i> Règle de Raabe	347
<i>Centrale.</i> Approximation d'une intégrale par une somme	348
<i>Mines.</i> Condition de convergence	349
X. Des séries alternées partout...	350
<i>Mines.</i> Etude d'un produit de complexes	351
X. Equivalents de sommes	353
X. Séries enveloppantes	355
X. Transformation de Toeplitz	357
<i>Mines.</i> Etude d'une série via une suite	360
11 Suites et séries de fonctions	361
<i>Classique.</i> Convergence uniforme d'une suite de fonctions polynomiales	362
<i>Mines.</i> Etude du mode de convergence d'une suite de fonctions	363
<i>Mines.</i> Brève étude d'une série de fonctions	363
<i>Mines.</i> Calcul explicite d'une somme	364
<i>Ensam.</i> Intersion somme/intégrale	364
<i>Ensam.</i> Intersion somme/intégrale	366
<i>Centrale.</i> Equivalent d'une somme	367
<i>Mines.</i> Dérivabilité d'une somme	368
<i>Centrale.</i> Relation fonctionnelle et série de fonctions	369
<i>Centrale.</i> Régularité d'une somme	370
<i>Mines.</i> Suite, puis série de fonctions	372
<i>Classique.</i> Intégration d'une série de fonctions	373
<i>Centrale.</i> Etude exhaustive de la somme d'une série de fonctions	374
X. Série des primitives itérées d'une fonction	376

<i>Classique.</i> Equivalent d'une série de fonctions	378
<i>Classique.</i> Intégrale à paramètre vs. série de fonctions	379
<i>Centrale.</i> Fonction « ζ alternée »	381
12 Séries entières	385
<i>Centrale.</i> Rayon de convergence	386
<i>MAPLE.</i> Rayon de convergence	386
<i>Classique.</i> Comparaison de séries entières au bord	388
<i>Ensam.</i> Equation comportant une somme infinie	389
<i>Classique.</i> Développement en série entière	390
<i>Classique.</i> Série génératrice des polynômes d'Hermite	391
<i>Mines.</i> Développement en série entière	393
<i>Mines.</i> Etude au bord	394
<i>Centrale.</i> Développements en série entière d'intégrales elliptiques	395
<i>Mines.</i> Série entière p -lacunaire	396
<i>X.</i> Etude au bord	397
<i>Centrale.</i> Rayons de convergence associés	398
<i>Classique.</i> Théorème abélien ou taubérien sur les séries numériques	398
<i>X.</i> Intégrale à paramètre et série entière	400
<i>Classique.</i> Transformée de Laplace d'une série entière	402
<i>Centrale.</i> Equivalent au bord	404
<i>MAPLE.</i> Série génératrice exponentielle du nombre d'involutions	405
<i>Centrale.</i> Calcul d'une série entière par une équation différentielle	407
<i>Classique.</i> Formule de Cauchy et applications	408
<i>Classique.</i> Matrice et série entière	409
<i>Classique.</i> Fonction de Bessel et intégrales de Wallis	410
<i>MAPLE.</i> Points à coordonnées entières dans un quart de disque	412
<i>Classique.</i> Fonction non développable en série entière	414
13 Séries de Fourier	417
<i>Ensam.</i> Calcul de sommes	418
<i>Classique.</i> Inégalité isopérimétrique (ou de Wirtinger)	419
<i>Classique.</i> Calcul de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$	420
<i>Centrale.</i> Un développement en série de Fourier	421
<i>Classique.</i> Si la série de Fourier converge uniformément...	422
<i>Mines.</i> Séries entières, séries de Fourier	422
<i>Mines.</i> Série de Fourier par des développements en série entière	423
<i>Classique.</i> Equation différentielle anticipante	424
<i>Mines.</i> π -périodicité et coefficients de Fourier	425
<i>Centrale.</i> Coefficients de Fourier à décroissance rapide	425
<i>Centrale.</i> Normes sur les fonctions périodiques	426
<i>MAPLE.</i> Convolution et séries de Fourier	427
<i>MAPLE.</i> Transformation d'Abel, observation du phénomène de Gibbs	429
<i>Classique.</i> Interversions et Fourier	433
<i>X.</i> Développement eulerien du sinus	435
<i>X.</i> Formule sommatoire de Poisson	436

14 Équations différentielles	439
<i>Classique.</i> Système différentiel en $z = x + iy$	440
<i>Classique.</i> Système différentiel antisymétrique	440
<i>Ensam.</i> Propriété des systèmes fondamentaux	441
<i>Mines.</i> Equation linéaire d'ordre 1 avec raccordement	442
X. Stabilité des solutions d'un système différentiel	444
<i>Mines.</i> Equation linéaire d'ordre 2 avec raccordement	445
<i>Centrale.</i> Détermination d'un système fondamental	446
<i>Classique.</i> Equation d'ordre 1 avec raccordement	448
<i>Classique.</i> Variation des constantes	449
<i>Centrale.</i> Variations des constantes 2	449
MAPLE. Etude qualitative avec MAPLE	451
<i>Classique.</i> Equation différentielle linéaire d'ordre 2 avec raccordement	452
X. Equation non linéaire	454
<i>Centrale.</i> Equation comportant une valeur absolue	455
X. Equation non linéaire	456
<i>Classique.</i> Lemme de Gronwall, application à une équation différentielle	457
<i>Classique.</i> Variables séparables	458
<i>Classique.</i> Equation non linéaire (de bernoulli)	460
<i>Centrale.</i> Equation différentielle anticipante	461
<i>Classique.</i> Variables séparables	463
<i>Classique.</i> Intégrale de Dirichlet via une équation différentielle	464
X. Etude qualitative d'une équation différentielle	467
15 Fonctions de plusieurs variables	471
<i>Centrale.</i> Recherche d'extremums sur un fermé	472
<i>Centrale.</i> Nature des différentielles	473
<i>Classique.</i> Changement de variable polaire	474
<i>Mines.</i> Recherche d'extremums	475
<i>Mines.</i> Etude d'un difféomorphisme	476
<i>Centrale.</i> Recherche d'extremums sur un fermé	478
<i>Centrale.</i> Equation aux dérivées partielles	479
<i>Centrale.</i> Difféomorphisme pour un changement de variables	480
<i>Classique.</i> Equation aux dérivées partielles d'ordre 2	481
<i>Centrale.</i> Difféomorphisme, équation aux dérivées partielles	482
<i>Classique.</i> Intégrales doubles	483
<i>Classique.</i> Centre de masse d'un demi-disque	485
<i>Mines.</i> Calcul d'intégrale simple via Fubini	486
<i>Classique.</i> Primitives d'une forme différentielle	487
<i>Centrale.</i> Optimisation d'intégrales avec contrainte au bord	488
<i>Classique.</i> Changement de variables dans une intégrale double	490
X. Intégrales utilisant une forme quadratique	491