Chapitre 1

Les fonctions et leurs applications

Les fonctions jouent un rôle fondamental bien au-delà des mathématiques. Grâce à leur graphe, on visualise aisément les données d'une expérience en physique, les variations d'une quantité en économie ; elles permettent aussi de transformer les données et d'effectuer des comparaisons. Des outils très puissants que vous verrez plus tard permettent de donner l'équation de tangentes ou de calculer la surface située sous une courbe.

Un mathématicien

À la fin du Moyen Âge, alors que la guerre de Cent Ans faisait rage et que la peste noire décimait la population, on se préoccupait peu de développer les sciences. C'est pourtant à cette époque qu'un théologien, Nicole **Oresme** (1325-1382), fit avancer les mathématiques. Deux siècles avant **Descartes**, il repère les points d'un plan par des coordonnées qu'il appelle *longitudino* et *latitudino*. Il définit des exposant fractionnaires et montre que la somme des inverses des n premiers entiers tend vers l'infini avec n.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Pour désigner l'infini, on utilise un symbole correspondant à un huit couché. Le premier à l'introduire fut le savant anglais John **Wallis** en 1655 dans un ouvrage traitant des coniques, c'est-à-dire des paraboles, des ellipses et des hyperboles. Par la suite, le prolifique mathématicien suisse Leonhard **Euler** en fit un grand usage ce qui le popularisa. Remarquons qu'il est analogue à la lemniscate de Bernoulli, courbe dont le nom vient d'un mot grec signifiant ruban.

COMPÉTENCES

les incontournables

- Les intervalles
  - déterminer des réunions et des intersections
  - calculer avec des inégalités
- Les fonctions numériques
  - images et antécédents
  - représentations graphiques
  - tableaux de variations
  - les extrema

et plus si affinités

- Déterminer algébriquement le sens de variation d'une fonction numérique
- Déterminer algébriquement le maximum d'une fonction numérique

Résumé de cours

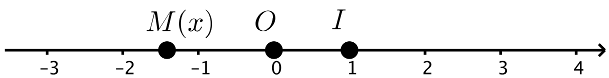
Les nombres réels

L'axe gradué

Définition : *On appelle **axe gradué** toute droite munie de deux points distincts O et I. Le couple $(O\ ;\ I)$ constitue un **repère de cette droite**, O est l'**origine du repère**, la distance OI est égale à une **unité de longueur**, c'est la **graduation** unité sur l'axe (OI).*

Définition :

- *Étant donné un axe gradué et $(O\ ;\ I)$ un repère sur cet axe, si M est un point de cet axe, on appelle **ensemble des nombres réels positifs**, noté $\mathbb{R}^+$, l'ensemble de tous les nombres (positifs) permettant de mesurer la distance OM. On appelle **ensemble des nombres réels négatifs**, noté $\mathbb{R}^-$, l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $-x \in \mathbb{R}^+$. L'**ensemble des nombres réels** ou **ensemble des réels**, noté $\mathbb{R}$, est l'ensemble des réels x appartenant à $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}^-$.*
- *Soit $M \in (OI)$: si $M \in [OI]$, notons x le nombre réel positif tel que $OM = x$; si $M \notin [OI]$, notons y le nombre réel positif tel que $OM = y$ et posons $x = -y$ alors x est négatif. Dans tous les cas, le nombre réel x repère le point M sur l'axe gradué (OI) muni du repère $(O;I)$, x est l'**abscisse** du point M et on notera $M(x)$.*



Remarques :

- À tout réel correspond un unique point sur l'axe gradué.
- Parmi les réels, on distingue les **nombres rationnels** – les nombres s'écrivant comme quotients de deux nombres entiers relatifs – des **nombres irrationnels**, donc non rationnels. Par exemple $-\dfrac{2}{3}$ (rationnel) et $\sqrt{2}$ (irrationnel) sont des réels.

Les intervalles

Définition : *Soit a et b deux nombres réels, tels que $a < b$.*

- *On dit qu'un nombre réel x est **encadré** par les réels a et b, si on peut écrire l'une des doubles inégalités suivantes : $a \leqslant x \leqslant b$, $a < x < b$, $a \leqslant x < b$ ou $a < x \leqslant b$. Chacune de ces doubles inégalités constitue un **encadrement** de x.*
- *Un **intervalle** est un ensemble de nombres réels x défini par une des inégalités : $x \leqslant a$, $x < a$, $x \geqslant a$, $x > a$, ou bien un des encadrements ci-dessus.*

Notation : *Un intervalle se note avec des crochets dont l'orientation dépend de l'appartenance ou non de la borne à l'ensemble considéré. Par exemple l'ensemble des réels x vérifiant $x < 5$ est l'intervalle ouvert $]-\infty\ ;\ 5[$, ou encore, l'ensemble des réels x vérifiant $-2 \leqslant x < 5$ est l'intervalle semi-ouvert à droite (ou semi-fermé à gauche) $[-2\ ;\ 5[$.*

Définition : *Soit I et J deux intervalles :*

- *On appelle* ***union (ou réunion) des intervalles*** *I et J, l'ensemble des réels, noté $I \cup J$, qui appartiennent à I ou à J. $I \cup J$ se lit I « union » J.*
- *On appelle* ***intersection des intervalles*** *I et J, l'ensemble des réels, noté $I \cap J$, qui appartiennent à I et à J. $I \cap J$ se lit I « inter » J.*

Notation : $]-\infty\ ;\ +\infty[=\mathbb{R}$, $]-\infty\ ;\ 0]=\mathbb{R}^-$, $[0\ ;\ +\infty[=\mathbb{R}^+$, $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[=\mathbb{R}^\star$, $]-\infty\ ;\ 0[=\mathbb{R}^{-\star}$ *et* $]0\ ;+\infty[=\mathbb{R}^{+\star}$.

Les fonctions numériques

Définition : *Une* ***fonction numérique*** *ou* ***fonction*** *f est un procédé qui à tout réel x d'un ensemble D de $\mathbb{R}$ associe un unique nombre réel noté $f(x)$ et appelé* ***image*** *de x par f. D, noté aussi D_f, est l'****ensemble de définition*** *de f.*

Remarque : L'adjectif « numérique » se rapporte à l'ensemble dans lequel on trouve les images : un ensemble de nombres comme $\mathbb{R}$.

Notation : *On peut synthétiser cette définition par le schéma ci-contre :* $f\ :\ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$. *Le plus souvent, la fonction f est donnée par la forme réduite de ce schéma $f\ :\ x \longmapsto f(x)$ sans faire référence à son ensemble de définition D. Cet ensemble existe toujours, et avec cette notation, D est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel $f(x)$ existe. Par exemple, la fonction $x \longmapsto x^2$ est définie sur (autrement dit a pour ensemble de définition) $\mathbb{R}$, et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.*

Définition : *Soit f une fonction définie sur un ensemble D et soit y un nombre réel quelconque. On appelle* ***antécédent*** *de y par f tous réels x appartenant à D, s'il y en a, tels que $f(x)=y$.*

Représentation graphique d'une fonction numérique

Rappels sur le repérage dans le plan

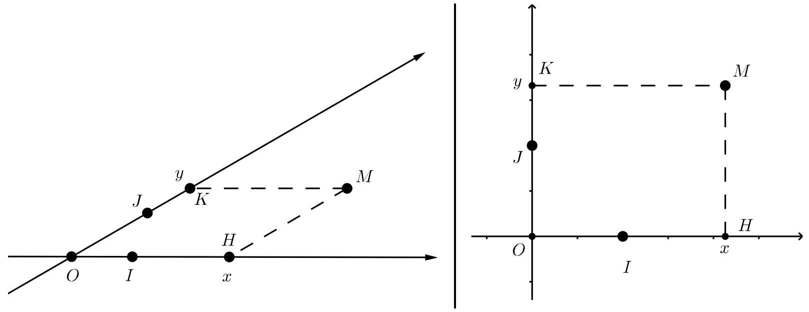
Définition : *Soit O, I et J trois points du plan non alignés. Les droites graduées (OI) et (OJ), d'unités respectives OI et OJ et d'origine commune O, constituent un* ***repère cartésien du plan*** *noté $(O\ ;\ I,\ J)$. $(O;I)$ est l'****axe des abscisses*** *et $(O\ ;\ J)$ est l'****axe des ordonnées****. Par ailleurs :*

- *si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, le* ***repère*** *est dit* ***orthogonal****;*
- *si de plus $OI=OJ$, le* ***repère*** *est dit* ***orthonormal*** *ou* ***orthonormé****.*

Définition : *Soit M un point du plan, ce dernier étant muni d'un repère $(O\ ;\ I,\ J)$.*

- *Si M n'appartient pas à un des axes de coordonnées, on considère les points H et K appartenant respectivement à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées, telles que les droites (MH) et (OJ) soient parallèles, ainsi que les droites (MK) et (OI). Notons x et y les abscisses respectives des points H et K sur les axes auxquels ils appartiennent. x et y sont les* ***coordonnées*** *du point M dans le repère $(O;I,J)$, x est son* ***abscisse*** *et y son* ***ordonnée****, et on peut écrire $M(x\ ;\ y)$.*
- *Si M appartient à l'axe des abscisses, il est repéré par le réel x sur cet axe, alors on peut écrire $M(x\ ;\ 0)$, x est son abscisse et 0 son ordonnée.*
- *Si M appartient à l'axe des ordonnées, il est repéré par le réel y sur cet axe, alors on peut écrire $M(0\ ;\ y)$, 0 est son abscisse et y son ordonnée.*

Dans tous les cas, il existe un unique couple de réels $(x\ ;\ y)$ pour repérer le point M, comme indiqué ci-dessus, et on écrit $M(x\ ;\ y)$.



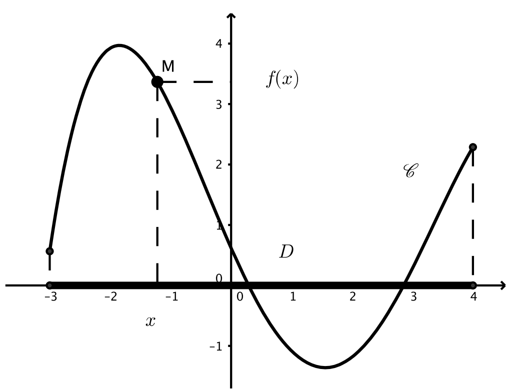
Remarque : Dans la suite on se placera dans un repère orthogonal, voire orthonormal (dessin de droite).

Graphe d'une fonction

Définition : *Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$. Le plan étant muni d'un repère, on appelle* ***représentation graphique*** *ou* ***graphe*** *de f l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $M\big(x; f(x)\big)$ du plan où $x \in D$. On dit alors que la* ***courbe*** *$\mathscr{C}$ a pour* ***équation*** *$y = f(x)$.*

Remarque : Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$$M(x;y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D \\ y = f(x) \end{cases}$$



Dans l'exemple ci-dessus, l'ensemble de définition est $D = [-3\ ;\ 4]$.

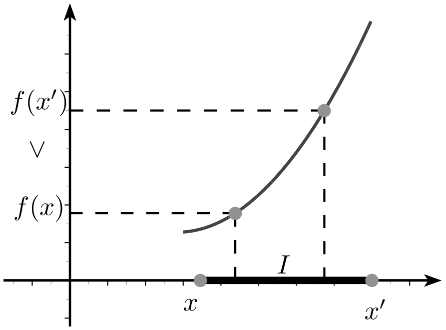
■ Sens de variation et extrema d'une fonction

Généralités

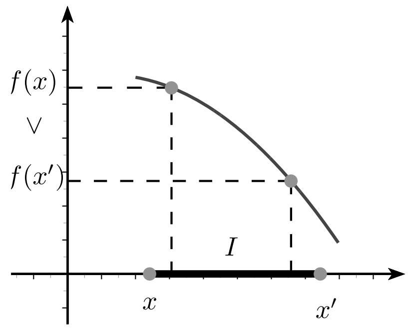
Définition : *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

- *On dit que f est* ***croissante*** *(resp.* ***strictement croissante****) sur I si quels que soient les réels x et x' dans I :*
  si $x \leqslant x'$ alors $f(x) \leqslant f(x')$ (resp. si $x < x'$ alors $f(x) < f(x')$).
- *On dit que f est* ***décroissante*** *(resp.* ***strictement décroissante****) sur I si quels que soient les réels x et x' dans I :*
  si $x \leqslant x'$ alors $f(x) \geqslant f(x')$ (resp. si $x < x'$ alors $f(x) > f(x')$).
- *On dit que f est* ***constante*** *sur I si quels que soient les réels x et x' dans I :*
  si $x \leqslant x'$ alors $f(x) = f(x')$.

- *On dit que f est* ***monotone*** *(resp.* ***strictement monotone****) sur I si f est croissante (resp. strictement croissante) ou bien décroissante (resp. strictement décroissante) sur I.*



f est strictement croissante sur l'intervalle I.



f est strictement décroissante sur l'intervalle I.

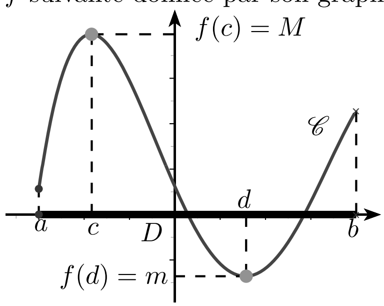
Définition : *Soit f une fonction définie sur un ensemble D.*

- *Un réel M est le* ***maximum*** *de f si*
  pour tous réels $x \in D$, $f(x) \leqslant M$ et s'il existe un réel $a \in D$ tel que $f(a) = M$.
- *Un réel m est le* ***minimum*** *de f si*
  pour tous réels $x \in D$, $f(x) \geqslant m$ et s'il existe un réel $a \in D$ tel que $f(a) = m$.
- *Un* ***extremum*** *de f est un minimum ou un maximum.*

Remarque : Maximum ou minimum, s'il existe, est unique.

Tableau de variations d'une fonction

Le tableau de variations est un résumé des variations d'une fonction et permet de repérer ses extrema. Considérons la fonction f suivante donnée par son graphe $\mathscr{C}$.



Son tableau de variations est le suivant.

$\boldsymbol{x}$	a		c		d		b
$\boldsymbol{f(x)}$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	$f(d)$	$\nearrow$	$\Vert$

Pour les tableaux de variations, indiquer :

- Sur la première ligne, les bornes de l'ensemble de définition $D = [a\ ;\ b[$, ainsi que les réels où f change de sens de variation. f n'étant pas définie en b, on dit que c'est une **valeur interdite**, cela se traduit par une double barre sur la deuxième ligne.
- Sur la deuxième ligne, le sens des flèches indique le sens de variation de f.

Méthodes

Un peu de logique

Méthode 1.1.— Comment matérialiser les enchaînements dans les raisonnements

On reconnaît en mathématiques deux grands types d'enchaînements logiques des propositions : l'**implication** et l'**équivalence**. Ces deux enchaînements se définissent et se rédigent comme suit.

Soit P et Q deux propositions.

- La phrase : « **si** P est vraie, **alors** Q est vraie » est une implication, et on dit que P implique Q qui s'écrit $P \Longrightarrow Q$.
- La phrase : « P est vraie **si, et seulement si**, Q est vraie » est une équivalence, et on dit que P et Q sont équivalentes, qui s'écrit $P \Leftrightarrow Q$. Plus précisément l'équivalence induit une double implication, en l'occurrence, on a $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$, on dit que ces deux implications sont **réciproques** l'une de l'autre.

Exemple : Résoudre l'équation $7x - 5 = 2x + 1$. x et y étant deux nombres réels, montrer l'implication $x < y \leqslant 0 \Longrightarrow y^2 < x^2$.
La réciproque est-elle vraie ? autrement dit, a-t-on une équivalence ?

- Résoudre l'équation $7x - 5 = 2x + 1$.

$$\begin{aligned} 7x-5=2x+1 &\Leftrightarrow 7x-2x=1+5 \\ &\Leftrightarrow 5x=6 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{6}{5} \\ 7x-5=2x+1 &\Leftrightarrow S=\left\{\frac{6}{5}\right\} \end{aligned}$$

  La présence des équivalences permet d'assurer, sans vérification utile, que le tout dernier résultat est l'unique solution de l'équation, ce qui raccourcit le raisonnement. À chaque équivalence, on a l'assurance de « remonter » le raisonnement, puisque chaque équivalence traduit deux implications de « sens contraires ».

- Démonstration de l'implication. Si $x < y \leqslant 0$, alors $0 \leqslant -y < -x$, $-y$ et $-x$ étant positifs, d'après le rappel fait à la **méthode 2.6**, on a $(-y)^2 < (-x)^2$, soit $y^2 < x^2$. On a donc montré l'implication attendue, mais la proposition réciproque est-elle vraie ? L'implication directe est vraie pour tous réels x et y tels que $x < y \leqslant 0$, la réciproque doit être vraie pour tous réels x et y vérifiant $y^2 < x^2$. Prenons $y = -1$ et $x = 2$, on a bien $y^2 < x^2$, par contre on a $y < 0 < x$ et non $x < y \leqslant 0$, donc la réciproque est fausse et nous n'avons pas d'équivalence entre les deux séries d'inégalités.

Remarques :

- Une implication ne peut pas toujours être remplacée par une équivalence.
- L'équivalence, quand celle-ci est réalisable, a l'avantage de réduire la longueur des raisonnements en mettant en évidence le sens direct et sa réciproque en une seule phrase.

Mise en œuvre : exercice 1.3 à **exercice 1.16**

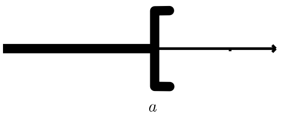
■ Inégalités et intervalles

❑ Méthode 1.2.— Comment construire un intervalle

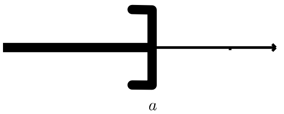
Un intervalle est l'écriture symbolique d'une inégalité comme $x < a$ ou d'un encadrement du type $a \leqslant x < b$, où a et b sont des nombres réels fixés. Pour les débutants, une aide est donnée par une représentation graphique.

$\boxed{1}$ Sur un axe gradué, on dessine en couleur l'ensemble des réels x vérifiant l'inégalité ou l'encadrement.

$\boxed{2}$ Soit a un des réels intervenant dans l'inégalité ou l'encadrement. Si $x < a$, on dessinera



le crochet ≪ tournant le dos ≫ à l'ensemble des x on dit que le crochet est ouvert, puisque a est exclu des valeurs de x. Si $x \leqslant a$, on dessinera



le crochet ≪ faisant face ≫ à l'ensemble des x on dit que le crochet est fermé, puisque a est une des valeurs de x.

$\boxed{3}$ Reste à traduire le dessin en intervalle. On notera deux choses.

- ▶ Si l'une des bornes est un infini, le crochet sera nécessairement ouvert, les deux seules présentations étant ≪ $]-\infty$ ≫ et ≪ $+\infty[$ ≫.
- ▶ Dans un intervalle, l'ordre des différents paramètres est important puisqu'ils doivent être écrits de gauche à droite, du plus petit au plus grand, ainsi l'écriture ≪ $[3; -\infty[$ ≫ n'a pas de sens.
- ▶ Les crochets sont ceux représentés sur le dessin.

Remarques :

- On considèrera que $-\infty$ est plus petit que tous les nombres réels et $+\infty$ plus grand que tous les nombres réels.
- Dans l'écriture d'un intervalle, l'ordre des bornes est important, ainsi la borne de gauche est strictement inférieure à celle de droite. Par exemple l'écriture ≪ $[3\ ;\ -1[$ ≫ n'a pas de sens.

Exemple : Décrire par un intervalle chacun des ensembles de réels x : $x > 3$ et $-2 \leqslant x < 3$.

- Déterminons l'ensemble des réels x vérifiant $x > 3$.

  $\boxed{1}$ Commençons par représenter graphiquement cet ensemble.

  $\boxed{2}$ L'inégalité étant stricte, le crochet au niveau de 3 est ouvert.