Chapitre 1

Limites et suites

La notion de limite joue un rôle fondamental en mathématiques car de nombreux résultats sont obtenus par itérations successives ; par exemple, lorsque la solution d'une équation ne s'exprime pas à l'aide des opérations et des fonctions déjà connues, les méthodes numériques permettent d'obtenir une suite de valeurs approchées convergeant vers la solution exacte. On définit en particulier de nombreuses notions nouvelles très utiles pour élargir le champ des mathématiques.

Un mathématicien

Archimède est avec Euclide le plus grand mathématicien de l'Antiquité. Il vivait à Syracuse, en Sicile. Sa découverte du principe ou de la poussée d'Archimède est souvent racontée de façon romancée. On sait moins qu'il fut le premier à utiliser des suites convergentes. Pour calculer une valeur approchée du nombre π, il inscrit et circonscrit au cercle des polygones ayant de plus en plus de côtés, jusqu'à 96. Il calcule de même l'aire englobée par un arc de parabole et fait converger une suite géométrique pour obtenir le résultat.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Le mathématicien allemand Lothar Collatz est surtout connu pour une conjecture d'aspect anodin qu'il a proposée en 1937. Prenons un entier strictement positif $a_0 > 1$; s'il est pair on pose $a_1 = a_0/2$ et sinon $a_1 = 3a_0 + 1$. De même, connaissant a_n, s'il est pair on pose $a_{n+1} = a_n/2$ et sinon $a_{n+1} = 3a_n + 1$. La récurrence s'arrête dès qu'on aboutit à 1. La conjecture affirme que, quel que soit l'entier a_0 choisi, on aboutit toujours, en un temps plus ou moins long à 1. Cependant, personne n'a réussi à ce jour à le démontrer et personne, non plus, n'a trouvé un exemple le contredisant.

COMPÉTENCES

les incontournables

- Découvrir le raisonnement par récurrence.
- Étudier la convergence de suites :
  - en appliquant les règles opératoires sur les limites ;
  - en utilisant les limites de suites de référence ;
  - en s'aidant des théorèmes de comparaison.
- Étudier le comportement à l'infini de suites récurrentes :
  - en appliquant le théorème de convergence monotone ;
  - en utilisant certains résultats sur les suites arithmético-géométriques ou homographiques.

et plus si affinités

- Étudier le comportement à l'infini d'une suite contractante.

Résumé de cours

Raisonnement par récurrence

Théorème 1.1.— Principe de récurrence —. Soit $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n et $n_0 \in \mathbb{N}$ un entier naturel fixé.
On suppose que la propriété P satisfait les deux conditions suivantes :

- **Initialisation :** $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Quel que soit l'entier $n \geqslant n_0$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

Alors, pour tout entier $n \geqslant n_0$ $P(n)$ est vraie.

Généralités sur les suites de nombres réels

Définition : *Une **suite de réels** peut être considérée comme une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qui à tout entier n associe le réel u_n, appelé **terme de rang** n. La suite elle-même est notée (u_n).*

Définition : Suites monotones —. *Soit (u_n) une suite de nombres réels définie sur $\mathbb{N}$.*

- *u est dite **croissante** lorsque pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.*
- *u est dite **décroissante** lorsque pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.*

Définition : Suites majorées, minorées, bornées —. *Soit (u_n) une suite de réels définie sur $\mathbb{N}$.*

- *u est **majorée** s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.*
- *u est **minorée**, s'il existe un réel $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.*
- *u est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.*

Suites possédant une limite

Définition : *Soit (u_n) une suite de nombres réels définie sur $\mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que*

- *(u_n) **admet ℓ pour limite**, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, si tout intervalle ouvert centré en ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.*
- *(u_n) **admet $+\infty$ pour limite**, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A, +\infty[$ (avec $A \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.*
- *(u_n) **admet $-\infty$ pour limite**, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty, A[$ (avec $A \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.*

*Lorsqu'elle existe, **la limite de la suite** (u_n) **est unique**.*

Vocabulaire : *lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$, on dit aussi que (u_n) **converge** vers ℓ.*
*Lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \{\pm\infty\}$, on dit que (u_n) **diverge** vers $\pm\infty$.*

Théorème 1.2.— Limites de suites puissances —.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- Si $k \geq 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- Si $k \geq 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$

■ Opérations sur les suites possédant une limite

Définition : *La connaissance des limites des suites (u_n) et (v_n) ne suffit pas toujours pour déterminer la limite de la somme, du produit ou du quotient. On parle alors de* ***cas d'indétermination****.*
Il existe quatre types de formes indéterminées (F.I.) que l'on note symboliquement (avec des guillemets) : « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » *et* « $\dfrac{0}{0}$ ».

Théorème 1.3.— Limite d'une somme —.
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Le tableau ci-contre indique les valeurs de la limite

$$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n$$

en fonction des valeurs de ℓ et ℓ'.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell = +\infty$	$\ell = -\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$\ell' = -\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Théorème 1.4.— Limite d'un produit —.
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Le tableau ci-contre indique les valeurs de la limite [1]

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \times v_n$$

en fonction des valeurs de ℓ et ℓ'.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}^\star$	$\ell = 0$	$\ell = \pm\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}^\star$	$\ell \times \ell'$	0	$\pm\infty$
$\ell' = 0$	0	0	F.I.
$\ell' = \pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.	$\pm\infty$

Théorème 1.5.— Limite d'un quotient —.
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et que (v_n) est une suite strictement positive à partir d'un certain rang telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Le tableau ci-contre indique les valeurs de la limite [1]

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$$

en fonction des valeurs de ℓ et ℓ'.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}^\star$	$\ell = 0$	$\ell = \pm\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}^\star$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$
$\ell' = 0^+$	$\pm\infty$	F.I.	$\pm\infty$
$\ell' = +\infty$	0	0	F.I.

On obtient un tableau analogue lorsque v_n est strictement négative à partir d'un certain rang.

Notation : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$ *signifie que (v_n) converge vers 0 et qu'à partir d'un certain rang, $v_n > 0$.*
De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^-$ *signifie que (v_n) converge vers 0 et qu'à partir d'un certain rang, $v_n < 0$.*

1. Lorsque le tableau indique une limite égale à $\pm\infty$, on peut déterminer le signe à l'aide de la règle des signes.

■ Limites et comparaison

Théorème 1.6.— Théorème de comparaison —. Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles qu'à partir d'un rang N, on ait $u_n \leqslant v_n$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 1.7.— Théorème d'encadrement ou des « gendarmes » —. Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels telles qu'à partir d'un rang N, on ait $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

■ Limites des suites monotones

Cas des suites convergentes

Théorème 1.8.— Convergence monotone —. Soit (u_n) une suite de réels définie sur $\mathbb{N}$.

- Si (u_n) est croissante et majorée alors elle converge.
- Si (u_n) est décroissante et minorée alors elle converge.

Théorème 1.9.— Soit (u_n) une suite de nombres réels définie sur $\mathbb{N}$.

- Si (u_n) est croissante et admet la limite ℓ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$.
- Si (u_n) est décroissante et admet la limite ℓ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ell$.

Cas des suites divergentes

Théorème 1.10.— Soit (u_n) une suite de réels définie sur $\mathbb{N}$.

- Si (u_n) est croissante et non majorée alors elle diverge vers $+\infty$.
- Si (u_n) est décroissante et non minorée alors elle diverge vers $-\infty$.

■ Limites des suites géométriques

Théorème 1.11.— Soit la suite (q^n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q > 1$ alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors la suite (q^n) est constante et égale à 1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$ alors la suite (q^n) converge vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leqslant -1$ alors la suite (q^n) n'admet pas de limite.

Méthodes

Raisonner par récurrence

Comprendre le principe du raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et n_0 un entier naturel fixé.

Définition : *On dit que la propriété P est **héréditaire** à partir de n_0 si elle vérifie :*

Pour tout entier $n \geqslant n_0$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ l'est aussi.

Autrement dit, dès qu'un entier $n \geqslant n_0$ possède la propriété P, son successeur $n+1$ en hérite !

Supposons que $P(n_0)$ est vraie et que P est héréditaire à partir de n_0. On a alors :

$$\left.\begin{array}{r} P(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{et } P \text{ est héréditaire} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} \text{donc } P(n_0+1) \text{ est vraie} \\ \text{et } P \text{ est héréditaire} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} \text{donc } P(n_0+2) \text{ est vraie} \\ \text{et } P \text{ est héréditaire} \end{array}\right\} \text{ etc.}$$

De *proche en proche*, on comprend sur cet exemple qu'une propriété héréditaire P des entiers naturels telle que $P(n_0)$ soit vraie sera automatiquement vérifiée par tous les entiers $n \geqslant n_0$. Toutefois, le procédé ci-dessus ne saurait constituer une démonstration rigoureuse, à cause des points de suspension, des « etc. », ou autres « ainsi de suite ». Pour conclure rigoureusement cette démonstration, il faut invoquer le **principe de récurrence**.

Faire une démonstration par récurrence

La méthode de démonstration par récurrence s'utilise **uniquement** pour démontrer les propriétés universelles des entiers naturels, c'est-à-dire des propriétés du type :

$$\text{Pour tout entier naturel } n \geqslant n_0, \quad P(n) \text{ est vraie}$$

où $P(n)$ est une propriété dépendant d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et n_0 un entier naturel fixé.

> ❑ **Méthode 1.1.— Comment faire une démonstration par récurrence**
> La rédaction d'une démonstration par récurrence s'articule en trois étapes distinctes :
> $\boxed{1}$ **Initialisation :** On vérifie simplement que $P(n_0)$ est vraie.
> $\boxed{2}$ **Hérédité :** On démontre que si, pour un n fixé supérieur à n_0, $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
> $\boxed{3}$ **Conclusion :** D'après le principe de récurrence, on a montré que pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Vocabulaire : *lors de la démonstration de l'hérédité, nous formulons l'hypothèse selon laquelle, pour un n fixé, $P(n)$ est vraie. Cette hypothèse est appelée l'**hypothèse de récurrence**.*

Exemple : considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sqrt{7\,u_n}$. Nous allons démontrer par récurrence que pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 7$.

- **Initialisation** : $u_0 = 1 \in [1;7]$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité** : Soit un entier naturel n donné tel que $1 \leqslant u_n \leqslant 7$ et montrons que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 7$ est vraie. On peut « multiplier » l'encadrement de l'hypothèse de récurrence par 7, il vient :
$$7 \leqslant 7\,u_n \leqslant 49.$$
La fonction $x \to \sqrt{x}$ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc $\sqrt{7} \leqslant \sqrt{7\,u_n} \leqslant \sqrt{49}$. On déduit que $1 \leqslant \sqrt{7} \leqslant \sqrt{7\,u_n} \leqslant 7$ et finalement $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 7$.
- **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 7$.

Mise en œuvre : exercice 1.1, **exercice 1.2**, **exercice 1.3** et **exercice 1.4**.

■ Suites réelles et ordre

> ❑ **Méthode 1.2.— Comment montrer qu'une suite est majorée**
> Démontrer qu'une suite (u_n) est majorée revient à prouver l'existence d'un majorant, c'est-à-dire d'un réel M, indépendant de n, tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
> - ▸ Si on connaît M, on peut prouver ce résultat directement ou par récurrence.
> - ▸ Si on ne connaît pas la valeur de M :
>   - ▹ On peut parfois conjecturer un majorant possible à l'aide de l'étude de la fonction f lorsque la suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$.
>   - ▹ On peut aussi tenter de deviner un majorant de la suite (u_n) en calculant ses premières valeurs ou à l'aide de sa représentation graphique.
>   - ▹ On effectue des majorations successives de u_n, jusqu'à obtenir un majorant M.

Remarque : ces méthodes s'adaptent facilement pour montrer que la suite (u_n) est minorée.

Exemples :

• La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{3 - u_n}$ et $u_0 = 1$. En calculant les premiers termes de cette suite à la calculatrice, on conjecture un minorant et un majorant possibles à cette suite : $m = 1$ et $M = 1,5$. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant 1,5$.

- **Initialisation :** $u_0 = 1 \in [1\ ;\ 1,5]$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité :** Soit n un entier naturel fixé vérifiant $1 \leqslant u_n \leqslant 1,5$. On obtient successivement les encadrements suivants : $1 \leqslant u_n \leqslant 1,5 \iff -1,5 \leqslant -u_n \leqslant -1 \iff 1,5 \leqslant 3 - u_n \leqslant 2$.
La fonction $x \to \sqrt{x}$ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc $\sqrt{1,5} \leqslant \sqrt{3 - u_n} \leqslant \sqrt{2}$. Or $1 \leqslant \sqrt{1,5}$ et $\sqrt{2} \leqslant 1,5$ donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1,5$. La propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, la suite (u_n) est bien bornée, plus précisément elle admet 1 comme minorant et $1,5$ comme majorant.

• La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{5n+1}{n+1} - n^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. On a
$$u_n \leqslant \frac{5n+1}{n+1} = \frac{5n+5-4}{n+1} = \frac{5n+5}{n+1} - \frac{4}{n+1} = 5 - \frac{4}{n+1} \leqslant 5.$$
Comme 5 ne dépend pas de n, c'est un majorant de la suite (u_n).

Mise en œuvre : exercice 1.9.

Méthodes

❑ Méthode 1.3.— Comment étudier la monotonie d'une suite
Étudier la monotonie d'une suite (u_n), c'est comparer deux termes consécutifs de u. Pour cela, on peut :

- Étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$: si pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n$ est positif (resp. négatif), la suite (u_n) est croissante (resp. décroissante).
- Étudier le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque la suite est à termes strictement positifs : si, pour tout entier n ce quotient est supérieur (resp. inférieur) à 1, la suite (u_n) est croissante (resp. décroissante).
- Étudier f lorsque (u_n) est définie par $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique : si f est croissante (resp. décroissante) alors (u_n) l'est aussi.
- Utiliser une récurrence, notamment lorsque (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple : soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1+n}{2+n}$. La fonction $f : x \mapsto \frac{1+x}{2+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$. Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc la suite (u_n) aussi.

■ Étudier le comportement à l'infini d'une suite à partir des suites usuelles

On connaît désormais le comportement à l'infini des suites puissances et des suites géométriques.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- Si $k \geq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$
- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/\sqrt{n} = 0^+$
- Si $k \geq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/n^k = 0$
- Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

On va utiliser ces connaissances pour l'étude de suites construites à partir de ces suites de référence.

À l'aide d'opérations algébriques

❑ Méthode 1.4.— Comment utiliser les règles opératoires sur les limites
$\boxed{1}$ Calculer les limites de chaque terme et facteur qui composent la suite (u_n) à l'aide des limites sur les fonctions usuelles rappelées ci-dessus (**théorèmes 1.2** et **1.11**).
$\boxed{2}$ Puis appliquer les règles opératoires sur les limites selon que l'on a une somme, un produit ou un quotient (**théorèmes 1.3**, **1.4** et **1.5**).

Exemple : calculons la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $u_n = 3n^5 + 2\sqrt{n} - \frac{1}{n^2}$.
(u_n) est la somme des suites $(3n^5)$, $(2\sqrt{n})$ et $\left(-\frac{1}{n^2}\right)$.

- On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5 = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^5 = +\infty$.
- De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$.

Par somme, il s'en suit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Mise en œuvre : exercice 1.5.