Première partie
Les sous-tests de logique mathématique et de calcul

I – Cours, savoir-faire et méthodes

II – Méthodologie du QCM de Calcul

III – Entraînez-vous !

IV – Méthodologie du QCM de Conditions minimales

V – Entraînez-vous !

Les tests de calcul et de conditions minimales sont sans aucun doute les plus redoutés des candidats quels que soient leur profil et leur parcours académique… Et ce, à juste titre !
Composée de 15 questions à résoudre en 20 minutes, bien évidemment sans calculatrice, cette épreuve est exigeante : le programme qu'elle couvre est assez vaste, le chronomètre est impitoyable et son formalisme ajoute un stress supplémentaire.

Pourtant, vous ne devez pas être effrayés par cette épreuve. Tentons de démystifier la fameuse partie Calcul.

1 – L'étendue du programme. Les notions mathématiques couvertes sont très denses, le programme officiel comprend en vrac :

- les entiers relatifs, les décimaux, les nombres réels ;
- les puissances et les racines carrées ;
- les pourcentages et les proportions ;
- les progressions arithmétiques et géométriques ;
- les identités remarquables ;
- les équations du premier et second degrés ;
- les systèmes d'équations à 2 et 3 inconnues ;
- l'analyse combinatoire ;
- les propriétés des droites parallèles (Théorème de Thalès) ;
- les propriétés des droites perpendiculaires (Théorème de Pythagore) ;
- les propriétés élémentaires du triangle, du cercle, du rectangle et du carré.

Dites-vous bien que toutes ces notions ont été abordées lors de vos études au collège. Les juristes, historiens et autres linguistes qui n'ont plus pratiqué les mathématiques depuis le lycée ont tous obtenu leur brevet des collèges … alors point d'inquiétude, il n'y a pas dans les tests de difficultés conceptuelles ou programmatiques. Avec une bonne remise à niveau, vous pourrez affronter tous types de questions. La difficulté réelle du test n'est pas là.

2 – Sans calculatrice. Cette contrainte doit être analysée correctement. « Sans calculatrice » signifie tout d'abord que les calculs ne seront jamais trop compliqués (on ne vous demande pas de devenir un génie du calcul et de trouver de tête la racine cubique de 592 !). « Sans calculatrice » signifie aussi que les calculs doivent être résolus par le calcul mental ou – si cela est nécessaire en les posant. Drogués à la calculatrice depuis bien longtemps, vous n'avez plus l'habitude du calcul mental et vous n'avez plus posé d'opération depuis le CM2 ! Le défi est donc, au cours de votre préparation, de retrouver une certaine habileté au calcul et de gagner en rapidité.

RAPIDITÉ & HABILETÉ… C'est ce qui fera la différence le jour J !

3 – 15 questions, 20 minutes, le compte à rebours infernal. L'essentiel de la difficulté de la partie calcul réside dans la contrainte de temps qui vous est imposée. Vous le verrez, le temps devient très relatif lorsque l'on passe le TAGE MAGE®. Pourtant, cette contrainte n'est pas insurmontable à condition de garder la tête froide et de s'en tenir à quelques règles d'or.

Premièrement, n'espérez pas traiter la totalité des questions le jour J … et ce n'est pas grave ! Les bons candidats traitent entre 70% et 80% des questions, la moyenne se situant plutôt entre 40% et 50%. Je ne le répéterai jamais assez, il ne s'agit pas de répondre à toutes les questions mais à un maximum de questions dont vous êtes sûrs à 100 %. Vous disposez ainsi plutôt de 2 minutes que d'une minute vingt secondes par question.

Deuxièmement, la rapidité s'acquiert avec l'entraînement. Comme un sprinter, vous devez multiplier les séances d'échauffement et d'entraînement au calcul mental et à la résolution de questions.
De plus, nous le verrons dans la suite de cet ouvrage, il faut être malin le jour de l'épreuve, une approche tactique de chaque question est une des clefs du succès. Ne cherchez pas à traiter les questions que vous ne comprenez pas ou qui vous paraissent trop difficiles (une question facile rapporte autant de points qu'une question difficile), assurez-vous plutôt de répondre à toutes les questions que vous maîtrisez (parce que vous les avez déjà travaillées). Allez à l'essentiel. Nous le verrons, un même mécanisme mathématique peut être posé en une multitude de questions différentes. A vous de deviner derrière l'énoncé le mécanisme abordé. Ne vous laissez pas déconcentrer par la rédaction de la question, retrouvez très rapidement le principe mathématique dont il est question.
Enfin, le QCM a ceci de particulier que la réponse se trouve sous vos yeux, elle vous est donnée par le concepteur du test. Profitez-en. Vous le verrez, utiliser les réponses vous fera gagner un temps précieux.

I – Cours, savoir-faire et méthodes

Avant de vous lancer dans la résolution des premières questions, il n'est pas inutile de consacrer du temps à reprendre les connaissances élémentaires. Bien évidemment, nous ne pouvons dans cet ouvrage reprendre l'ensemble des notions. Pour un cours complet, nous vous renvoyons à l'ouvrage « *Tests de logique mathématique et calcul* » (même éditeur, même auteur).

I.1 – Reprenez les bases de l'arithmétique

1.a - Nombres, opérations basiques et divisibilité

Astuce : Il est important de différencier les **nombres** et les **chiffres**.
Les chiffres (nous utilisons les chiffres arabes) sont les symboles : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qui, combinés, forment des nombres.
Dans un nombre, le chiffre le plus à droite est appelé l'unité, le suivant vers la gauche la dizaine, le suivant la centaine, le millier,… Si le nombre possède des décimales, on trouve de gauche à droite après la virgule, les dixièmes, les centièmes, les millièmes, …

Priorités dans les calculs.

$$a\times(b + c) = a\times b + a\times c$$

$$a\times(b - c) = a\times b - a\times c$$

$$(a + b)\times(c + d) = a\times c + a\times d + b\times c + b\times d$$

$$c\times(a + b) + d\times(a + b) = (a + b)\times(c + d)$$

Les tables de multiplication.
Je vous conseille vivement de **réapprendre (apprendre ?) vos tables de multiplication de 1 à 15**.

Recopiez-les, affichez-les, récitez-les… peu importe la méthode, sachez-les ! Comme il vous faut maîtriser l'alphabet avant d'écrire, les tables de multiplication sont la base de l'arithmétique.

×	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	6	8	10	12	14	16
3	3	6	9	12	15	18	21	24
4	4	8	12	16	20	24	28	32
5	5	10	15	20	25	30	35	40
6	6	12	18	24	30	36	42	48
7	7	14	21	28	35	42	49	56
8	8	16	24	32	40	48	56	64
9	9	18	27	36	45	54	63	72
10	10	20	30	40	50	60	70	80
11	11	22	33	44	55	66	77	88
12	12	24	36	48	60	72	84	96
13	13	26	39	52	65	78	91	104
14	14	28	42	56	70	84	98	112
15	15	30	45	60	75	90	105	120

×	9	10	11	12	13	14	15
1	9	10	11	12	13	14	15
2	18	20	22	24	26	28	30
3	27	30	33	36	39	42	45
4	36	40	44	48	52	56	60
5	45	50	55	60	65	70	75
6	54	60	66	72	78	84	90
7	63	70	77	84	91	98	105
8	72	80	88	96	104	112	120
9	81	90	99	108	117	126	135
10	90	100	110	120	130	140	150
11	99	110	121	132	143	154	165
12	108	120	132	144	156	168	180
13	117	130	143	156	169	182	195
14	126	140	154	168	182	196	210
15	135	150	165	180	195	210	225

<u>Divisibilité.</u> De nombreuses questions portent sur la divisibilité tant en calcul qu'en conditions minimales ou en logique, il faut donc parfaitement connaître les critères de divisibilité.

Méthode : critères de divisibilité

- **Critère de divisibilité par 2.**

Un nombre N est divisible par 2 si et seulement si N est pair, i.e. s'il se termine par 0, 2, 4, 6, 8.

- **Critère de divisibilité par 3.**

Un nombre N est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Ex. : 1.215 est divisible par 3 car 1 + 2 + 1 + 5 = 9 et, 9 est divisible par 3.

- **Critère de divisibilité par 4.**

Un nombre N est divisible par 4 si et seulement si ses deux derniers chiffres sont divisibles par 4.

Ex. : 123.212.216 est divisible par 4 car 16 est divisible par 4.

- **Critère de divisibilité par 5.**

Un nombre N est divisible par 5 si et seulement si N se termine par 0 ou 5.

- **Critère de divisibilité par 6.**

Un nombre N est divisible par 6 si et seulement si N est à la fois divisible par 2 **<u>et</u>** par 3. Un nombre N est donc divisible par 6 s'il est pair et si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Ex. : 1.716 est divisible par 6 car il est pair, et, 1 + 7 + 1 + 6 = 15 et, 15 est divisible par 3.

- **Critère de divisibilité par 7.**

Un nombre N est divisible par 7 si et seulement si en calculant la somme de ses chiffres pris à partir de la droite multipliés respectivement par 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, … le résultat est un multiple de 7.

Ex. : 413 est divisible par 7 car $3\times1 + 1\times3 + 4\times2 = 14$
Et, 14 est divisible par 7.

Autre méthode pour un nombre à 3 chiffres : un nombre à trois chiffres CDU est divisible par 7 si et seulement si CD – 2U est divisible par 7.

Ex. : 413 est divisible par 7 car $41 - 2\times3 = 35$ et, 35 est divisible par 7.

Inutile de vous faire remarquer que ces critères sont extrêmement compliqués à appliquer et, que le meilleur moyen de savoir si un nombre est divisible par 7 est de connaître la table des 7 et de décomposer ce nombre en multiple(s) de sept.

Ex. : 413 peut se décomposer en multiples évidents de 7
$413 = 420 – 7$ Donc, $413 = 6\times7\times10 – 7 = 59\times7$!

- **Critère de divisibilité par 8.**

Un nombre N est divisible par 8 si et seulement si ses trois derniers chiffres sont divisibles par 8.

Ex. : 123 212 216 est divisible par 8 car 216 est divisible par 8.

- **Critère de divisibilité par 9.**

Un nombre N est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Ex. : 7.218 est divisible par 9 car 7 + 2 + 1 + 8 = 18
Et, 18 est divisible par 9.

- **Critère de divisibilité par 10.**

Un nombre N est divisible par 10 si et seulement si N se termine par 0.

- **Critère de divisibilité par 11.**

Un nombre N est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres de rang impair et la somme de ses chiffres de rang pair est divisible par 11.
Pour un nombre à trois chiffres, la somme des unités et des centaines est égale au chiffre des dizaines (attention, c'est un critère de divisibilité et pas de non divisibilité).

Ex. : 495 est divisible par 11 car 4 + 5 = 9.
8.690 est un multiple de 11 car (8 + 9) – (6 + 0) = 11

- **Critère de divisibilité par 13** (pour un nombre à trois chiffres)**.**

Un nombre à trois chiffres CDU est divisible par 13 si et seulement si CD + 4U est divisible par 13.

Ex. : 637 est divisible par 13 car 63 + 4×7 = 91 et 91 est divisible par 13.

- **Critère de divisibilité par 17** (pour un nombre à trois chiffres)**.**

Un nombre à trois chiffres CDU est divisible par 17 si et seulement si CD - 5U est divisible par 17.

Ex. : 476 est divisible par 17 car 47 - 5×6 = 17 et 17 est divisible par 17.

Les nombres premiers. Un nombre premier n'est divisible que par 1 et par lui-même.
Vous le constaterez lors des concours, de nombreuses questions portent sur les nombres premiers et par essence ils sont difficiles à repérer. C'est pourquoi il faut apprendre par cœur les plus usuels.

Les classiques : Apprenez-les.

2 ◆ 3 ◆ 5 ◆ 7 ◆ 11 ◆ 13 ◆ 17 ◆ 19 ◆ 23 ◆ 29 ◆ 31 ◆ 37 ◆ 41
43 ◆ 47 ◆ 53 ◆ 59 ◆ 61 ◆ 67 ◆ 71 ◆ 73 ◆ 79 ◆ 83 ◆ 89 ◆ 97

Remarquez que 2 est le seul nombre premier pair.

Astuce. Comment savoir si un nombre est premier ?

Pour reconnaître un nombre premier, il faut essayer de le diviser par un nombre premier. L'astuce consiste à trouver une approximation de la racine carrée (R) du nombre et de vérifier si les nombres premiers inférieurs à la valeur approchée (R) divisent le nombre étudié. Si aucun des nombres premiers inférieurs à (R) ne divise ce nombre, alors il est premier.

Décomposition en facteurs premiers. Tout entier naturel supérieur à 1 peut être décomposé d'une manière unique en un produit de nombres premiers.

Ex. : la décomposition de 495 donne $11 \times 9 \times 5$

Astuce. La technique de décomposition de nombres est **LA** méthode-clé pour gagner en rapidité de calcul. Pour simplifier une fraction, effectuer mentalement une division ou une multiplication : la décomposition vous permet de travailler avec des nombres simples. Devenue un réflexe, cette méthode vous fera gagner un temps précieux le jour du concours. Entraînez-vous !

Plus petit commun multiple (PPCM). C'est le plus petit entier positif qui est multiple de deux ou plusieurs entiers d'une série donnée.

Plus grand commun diviseur (PGCD). C'est le plus grand entier positif diviseur de deux ou plusieurs entiers sans reste. Le PGCD correspond au produit des facteurs qui sont communs dans toutes les décompositions des entiers de la série.

Principales opérations sur les nombres pairs et impairs.

+	Pair	Impair
Pair	Pair	Impair
Impair	Impair	Pair

×	Pair	Impair
Pair	Pair	Pair
Impair	Pair	Impair

Retenez que $\forall$ n entier pair ou impair : **n×Pair = Pair**
$(\text{Pair})^n$ = Pair
$(\text{Impair})^n$ = Impair

Astuce. En cas de doute… testez la parité avec les chiffres 1 et 2.

Ex. : $1 \times 2 = 2$ (pair) $1 \times 1 = 1$ (impair) …

1.b - Puissances et racines carrées

Puissance. Une puissance indique combien de fois un nombre apparaît comme facteur d'un produit.
Dans l'expression b^p, b est la **base** et p la **puissance**. On dit que b est élevée à la puissance p.

Ex. : $12^6 = 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12$ (12 est factorisé 6 fois)

Remarques importantes.
- La puissance 2 se dit « au carré » et la puissance 3 se dit « au cube ».
- Un carré est toujours positif !

- Un nombre, qu'il soit positif ou négatif, élevé à une puissance paire est toujours positif.
- Un nombre élevé à une puissance impaire est toujours du signe de sa base.
- S'il n'y a pas de parenthèses, vous appliquez la puissance uniquement au nombre et non à son signe : $-2^2 = -4 \neq (-2)^2 = 4$
- La puissance d'un nombre compris entre 0 et 1 est toujours inférieure à sa base : $0,9^2 = 0,81$

Les formules classiques : Apprenez-les.

$$\boxed{x^0 = 1}$$

$$\boxed{(x^a)^b = x^{a\times b}}$$

$$\boxed{x^1 = x}$$

$$\boxed{\frac{1}{x^a} = x^{-a}}$$

$$\boxed{x^a \times x^b = x^{a+b}}$$

$$\boxed{x^a \times y^a = (x \times y)^a}$$

$$\boxed{\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}}$$

Astuce. Calculer facilement le carré d'un nombre.

Lorsque l'on connaît le carré d'un nombre, il est très facile de calculer le carré du nombre suivant ou du nombre précédent en utilisant les identités remarquables.

Souvenez vous : $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$, il suffit donc de rajouter $(2a + 1)$ au carré de l'entier *a* pour calculer le carré de l'entier suivant !

Ex. : si vous connaissez $35^2 = 1.225$,
alors $36^2 = 35^2 + [2\times35 + 1] = 1.225 + 71 = 1.296$

De même, $(a – 1)^2 = a^2 - 2a + 1$, il suffit donc de rajouter $(-2a + 1)$ au carré de l'entier *a* pour calculer le carré de l'entier précédent !

Ex. : si vous connaissez $35^2 = 1.225$,
alors $34^2 = 35^2 + [-2\times35 + 1] = 1.225 - 69 = 1.156$

Astuce. Calculer le carré d'un nombre se terminant par 5.

Pour calculer le carré d'un nombre à deux chiffres se terminant par 5, il suffit de multiplier le chiffre des dizaines par son consécutif et de juxtaposer 25 au résultat obtenu.

Comprenez qu'un nombre à deux chiffres se terminant par 5 peut s'écrire de la forme *d5* (d matérialisant le chiffre des dizaines). Ce nombre peut se décomposer en $(10\times d + 5)$ et,

$(10\times d + 5)^2 = 100d^2 + 100d + 25 = 100\times d\times(d + 1) + 25$.

Ex. : pour calculer le carré de 65, multiplions le chiffre des dizaines par son consécutif : $6\times7 = 42$, puis, juxtaposons 25 au résultat : 42//25.
Alors, $65^2 = 4225$.

En combinant ces deux astuces, vous pourrez calculer en quelques secondes le carré d'un nombre à deux chiffres quel qu'il soit !

<u>Les carrés et les cubes parfaits.</u> Apprenez-les !

Un carré parfait est un entier dont la racine carrée est un nombre entier.

Carrés	**Cubes**
$1^2 = 1$	$1^3 = 1$
$2^2 = 4$	$2^3 = 8$
$3^2 = 9$	$3^3 = 27$
$4^2 = 16$	$4^3 = 64$
$5^2 = 25$	$5^3 = 125$
$6^2 = 36$	$6^3 = 216$
$7^2 = 49$	$7^3 = 343$
$8^2 = 64$	$8^3 = 512$
$9^2 = 81$	$9^3 = 729$
$10^2 = 100$	$10^3 = 1.000$
$11^2 = 121$	$11^3 = 1.331$
$12^2 = 144$	$12^3 = 1.728$
$13^2 = 169$	
$14^2 = 196$	
$15^2 = 225$	
$16^2 = 256$	
$17^2 = 289$	
$18^2 = 324$	
$19^2 = 361$	
$20^2 = 400$	
$25^2 = 625$	
$30^2 = 900$	
$35^2 = 1.225$	

<u>Identités remarquables.</u>

$a^2 - b^2 = (a + b)\times(a - b)$

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b$

$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b$

$a^3 - b^3 = (a - b)\times(a^2 + a.b + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)\times(a^2 - a.b + b^2)$

Racine carrée. **x** est appelée racine carrée de ***y*** si **x** élevée au carré vaut ***y***. On utilise le symbole $\sqrt{\ }$ pour indiquer la racine carrée positive d'un nombre.
Attention, un nombre admet toujours deux racines carrées, une positive et une négative !

Ex. : 4 et -4 sont les racines carrées de 16, car $4^2 = 16$ et $(-4)^2 = 16$

Les formules classiques. Apprenez-les.

$$\boxed{x = \sqrt{x^2}}$$

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)^a = \sqrt{x^a}}$$

$$\boxed{\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}}$$

$$\boxed{\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{x \times y}}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}}$$

Les racines carrées les plus fréquentes aux concours.

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41 \qquad \sqrt{3} \approx 1{,}73 \qquad \sqrt{5} \approx 2{,}24$$

Remarques.

- Il est impossible de simplifier une somme de racines carrées.
- Pour simplifier une racine carrée il faut factoriser les carrés parfaits et les sortir de leurs racines.

Ex. : $\sqrt{10800} = \sqrt{100 \times 36 \times 3} = \sqrt{100} \times \sqrt{36} \times \sqrt{3} = 10 \times 6 \times \sqrt{3} = 60\sqrt{3}$