Chapitre I

Géométrie dans l'espace

Sommaire

Introduction

Après avoir donné les règles de représentation en perspective cavalière et rappelé les volumes des solides usuels, nous énoncerons des résultats concernant les droites et plans et leurs positions respectives possibles.

Bien évidemment, nous nous plaçons dans le cadre de la géométrie euclidienne et des fameux axiomes d'Euclide ($\sim$ 300 av. J.-C.). La plupart des résultats de géométrie classique seront admis et sont très intuitifs. Toutefois, leur démonstration est parfois plus délicate qu'il n'y paraît car il est souvent tentant d'utiliser des propriétés « visuelles » qui ne sont en fait pas encore démontrées. Il est donc toujours utile de relire les *Éléments* d'Euclide *in extenso* :

http ://euclides.fr/bibliotheque/euclide/index.html | ;-)

Par ailleurs, cette géométrie n'est pas *ultime*. En effet, ce que l'on appelle le cinquième postulat d'Euclide – qui affirme que, dans un plan, par un point distinct d'une droite, il existe une et une seule droite parallèle à cette droite – a été de plus en plus questionné au fil des siècles. D'aucuns disant que c'est un théorème qui doit être démontré, d'autres remettant en cause l'existence même de ce résultat. Cela a mené à des géométries différentes, dites *non euclidiennes*, et à de nouvelles et prolifiques théories. Ceci vous paraît peut-être iconoclaste mais placez vous sur une sphère, disons la Terre. Puisqu'ils réalisent les distances minimales, les grands cercles sont alors les équivalents des droites. Et maintenant, que pensez-vous de ce fameux postulat ?

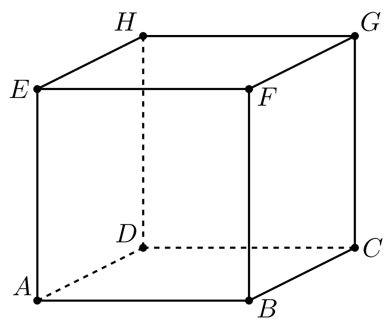
Il n'y a pas de grands cercles parallèles : ils sont tous sécants en deux points antipodaux (cf. méridiens par exemple). Sur Terre, il n'y a pas de « droites » parallèles. Nous vivons dans un monde non euclidien !

1 Perspective cavalière

La représentation d'un objet en trois dimensions par une figure plane, en deux dimensions, est une opération délicate. En mathématiques, on utilise généralement la représentation en ***perspective cavalière***. C'est le point de vue que l'on avait du « cavalier », le promontoire de terre situé en arrière des fortifications pour observer les assaillants (XVI^e s.). En voici les propriétés principales :

Propriété 1 *Dans la perspective cavalière,*

- *les droites de la réalité sont représentées par des droites ;*
- *deux droites parallèles dans la réalité sont représentées par deux droites parallèles ;*
- *les milieux des segments et, plus généralement, les rapports de longueurs sont conservés ;*
- *les longueurs et les angles ne sont généralement pas conservés ;*
- *par convention, les éléments cachés sont représentés en pointillés.*



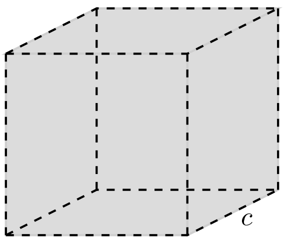
Ceci est un cube...
représenté en perspective cavalière.
On le nomme $ABCDEFGH$ en faisant bien correspondre le premier et le cinquième point, le second et le sixième, etc.

En réaliser un patron puis vérifier en page 15.

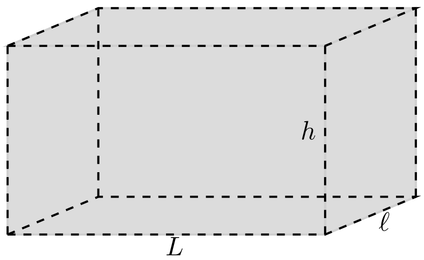
2 Solides usuels

Surlignez les arêtes des solides suivants de façon pertinente.

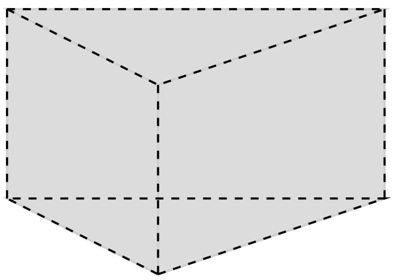
Cube : $\mathcal{V} = c^3$



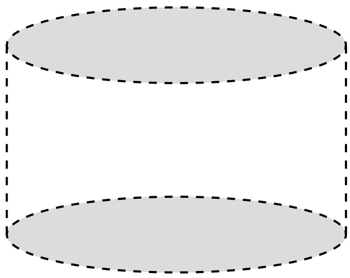
Pavé droit : $\mathcal{V} = L.\ell.h$



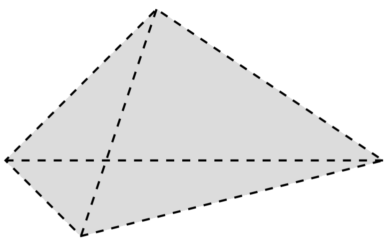
Prisme Droit : $\mathcal{V} = \mathscr{B}.h$



Cylindre : $\mathcal{V} = \mathscr{B}.h$

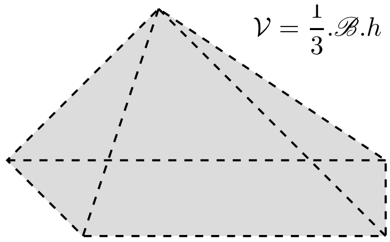


Tétraèdre : $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}.\mathscr{B}.h$

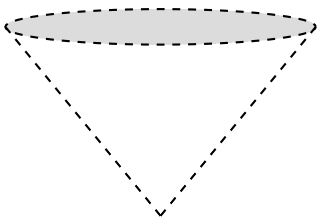


Pyramide à base polygonale :

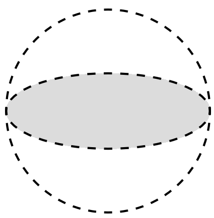
$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}.\mathscr{B}.h$



Cône $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}.\mathscr{B}.h$



Sphère : $\mathscr{S} = 4\pi.R^2$ $\mathcal{V} = \dfrac{4}{3}.\pi.R^3$



3 Droites et plans de l'espace

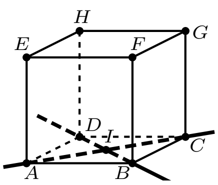
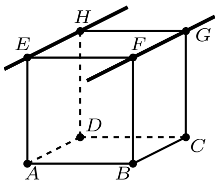
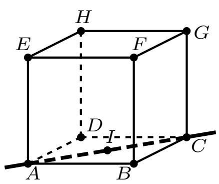
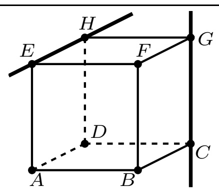
Ce paragraphe consiste en une série de définitions et de résultats admis. Commençons par quelques principes de base.

- Par deux points distincts de l'espace passe une unique droite.
- Par trois points non alignés passe un unique plan.
- Si un plan contient deux points distincts A et B, il contient la droite (AB).
- Tous les théorèmes de géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

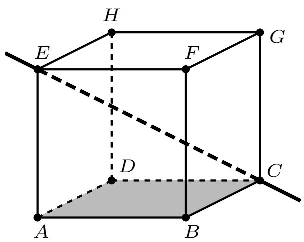
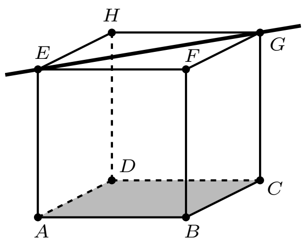
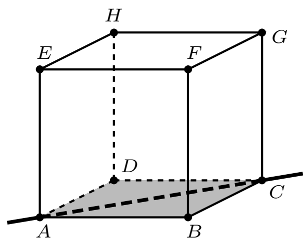
Les figures suivantes représentent un cube vu en perspective cavalière. Cette représentation facilite la vision dans l'espace mais les résultats énoncés restent bien entendu vrais hors du cube.

3.1 Positions relatives de droites et de plans

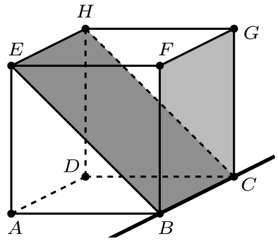
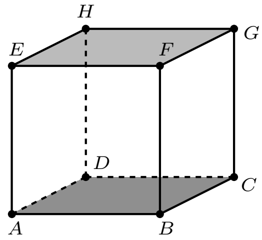
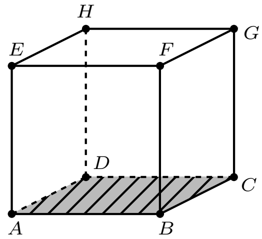
- Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.
  Si elles sont coplanaires, alors elles sont soit parallèles, soit sécantes.

<table>
<tr><td colspan="3">Droites coplanaires</td><td rowspan="2">Droites non coplanaires</td></tr>
<tr><td>Droites sécantes</td><td colspan="2">Droites parallèles</td></tr>
<tr>
<td>Les droites (AC)
et (DB) sont
sécantes en I.</td>
<td>(EH) et (FG) sont
strictement
parallèles.</td>
<td>Les droites (AI)
et (AC) sont
confondues.</td>
<td>Les droites (EH)
et (CG) sont
non coplanaires.</td>
</tr>
</table>

- Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

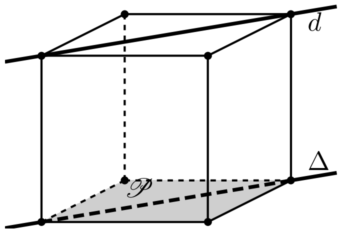
<table>
<tr><td>Droite et plan sécants</td><td colspan="2">Droite et plan parallèles</td></tr>
<tr>
<td>La droite (EC)
et le plan (ABC)
sont sécants en C.</td>
<td>La droites (EG)
et le plan (ABC)
sont strictement parallèles.</td>
<td>La droite (AC)
est contenue
dans le plan (ABC).</td>
</tr>
</table>

- Deux plans de l'espace sont soit sécants suivant une droite, soit parallèles.

Plans sécants	Plans parallèles	
 Les plans (EBC) et (FBC) sont sécants suivant la droite (BC).	 Les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles.	 Les plans (ABC) et (ABD) sont confondus.

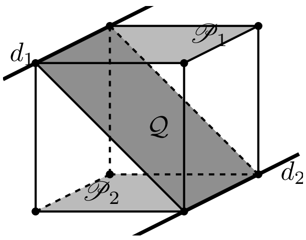
3.2 Parallélisme dans l'espace

Propriété 2 *Δ, d, d_1 et d_2 désignent des droites et $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$, $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ des plans.*



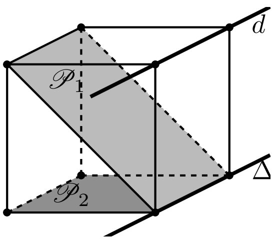
$$\left.\begin{array}{l} d \,//\, \Delta \\ \Delta \subset \mathscr{P} \end{array}\right\} \implies d \,//\, \mathscr{P}$$

Une droite parallèle à une droite d'un plan est parallèle à ce plan.



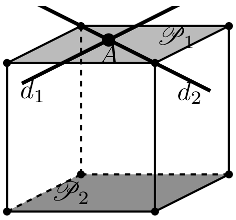
$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{P}_1 \,//\, \mathscr{P}_2 \\ \mathscr{Q} \bigcap \mathscr{P}_1 = d_1 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} \mathscr{Q} \bigcap \mathscr{P}_2 = d_2 \\ d_1 \,//\, d_2 \end{array}\right.$$

Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersections sont parallèles.



$$\left.\begin{array}{l} d \,//\, \mathscr{P}_1 \\ d \,//\, \mathscr{P}_2 \\ \mathscr{P}_1 \bigcap \mathscr{P}_2 = \Delta \end{array}\right\} \implies d \,//\, \Delta$$

Une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur droite d'intersection.



$$\left.\begin{array}{l} d_1 \subset \mathscr{P}_1, \quad d_2 \subset \mathscr{P}_1 \\ d_1 \bigcap d_2 = \{A\} \\ d_1 \;//\; \mathscr{P}_2, \quad d_2 \;//\; \mathscr{P}_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{P}_1 \;//\; \mathscr{P}_2$$

Si un plan contient deux droites sécantes parallèles à un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

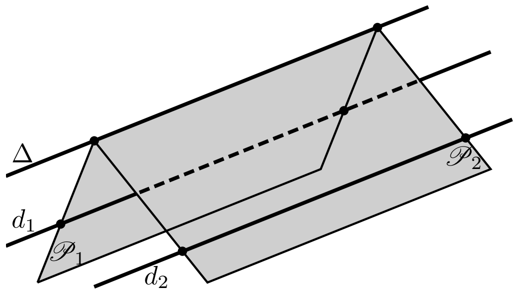
<u>*Remarque*</u> : Dans la dernière propriété (comme dans les autres), les conditions sont « optimales ».
Si l'on n'a qu'une seule droite vérifiant ces conditions ou si l'on a deux droites non sécantes vérifiant ces conditions, alors la conclusion est fausse.

Théorème 1 ***Théorème du toit***

d_1 et d_2 sont deux droites parallèles telles que d_1 est contenue dans un plan $\mathscr{P}_1$ et d_2 dans un plan $\mathscr{P}_2$.
Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants suivant la droite Δ, alors d_1 et d_2 sont parallèles à Δ.

$$\textit{Si} \quad \left\{\begin{array}{l} d_1 \;//\; d_2 \\ d_1 \subset \mathscr{P}_1 \\ d_2 \subset \mathscr{P}_2 \\ \mathscr{P}_1 \bigcap \mathscr{P}_2 = \Delta \end{array}\right.$$

$$\textit{alors} \quad \left\{\begin{array}{l} \Delta \;//\; d_1 \\ \Delta \;//\; d_2 \end{array}\right.$$



Exercices

DANS L'ESPACE

Exercice 1 Représenter un cube en perspective cavalière, le nommer $MAGRITEU$ puis réaliser son patron.
Faire de même pour un tétraèdre régulier $MIRO$.

Exercice 2 $GAUDI$ est une pyramide régulière de sommet G : sa base est un carré de centre O, ses faces latérales sont des triangles équilatéraux de côté $4\,\text{cm}$.

1. Calculer la hauteur de cette pyramide puis en donner le volume.
2. Calculer l'aire de la surface de cette pyramide.

Exercice 3 Let $ABCDEFGH$ be a cube, I, J and K be the middles of $[AB]$, $[BC]$ and $[BF]$ and let's denote a the length AB.

1. Justify that IJK is an equilateral triangle.
2. Calculate IK.
3. What is the area of the triangle BIK ?
4. Calculate the volume of the tetrahedron $BIJK$.
5. What is the area of the triangle IJK ?
6. Calculate the length of the height from the vertex B of the tetrahedron $BIJK$.

Exercice 4 $JANOUVEL$ est un parallélépipède rectangle.

1. (a) Citer des droites non coplanaires.
   (b) Citer des droites passant par U et parallèles au plan (ANE).
2. I est le milieu de $[JA]$ et K celui de $[NO]$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection des deux plans. Justifier.
   (a) (JIU) et (AIE) (b) (JOI) et (KAN) (c) (LUV) et (KAN)

Exercice 5 $DALI$ est un tétraèdre. Z, E, B sont des points quelconques des arêtes $[DL]$, $[AL]$ et $[AI]$ respectivement, U est un point quelconque de la face ALI, tous ces points n'étant pas « aux bords ».

1. Étudier la position relative des droites :
   (a) (DE) et (BZ) (b) (ZU) et (AL) (c) (BE) et (AL)
2. Dans chaque cas, la droite et le plan sont-ils sécants ?
   (a) (LU) et (ADI) (b) (AI) et (DUL)

Exercice 6 $TIKAL$ est une pyramide de sommet T à base trapézoïdale telle que $(IK)//(AL)$. M est un point de l'arête $[TA]$. Le plan (KIM) coupe la droite (TL) en Y. Démontrer que les droites (MY) et (LA) sont parallèles.

Exercice 7 $GIZEH$ est une pyramide de base carrée $IZEH$ de centre O.

1. L'intersection des plans (GIZ) et (GZE) est
   (a) la droite (GZ) (b) le segment $[GZ]$ (c) le point G (d) la droite (IE)
2. L'intersection des plans (GIE) et (GZH) est
   (a) le point G (b) le plan $(IZEH)$ (c) le point O (d) la droite (GO)
3. Les droites (GZ) et (IE) sont
   (a) coplanaires (b) parallèles (c) sécantes (d) non coplanaires
4. L'intersection des plans (GIZ) et (GEH) est
   (a) le point G (b) le plan $(IZEH)$ (c) une droite passant par le point G
   (d) la droite (GO)

Exercice 8 $ABCDEFGH$ est un cube où I est un point de l'arête $[CG]$.

1. Les droites (EH) et (BC) sont (a) coplanaires (b) non coplanaires
2. Les droites (AG) et (BH) sont (a) coplanaires (b) non coplanaires
3. Les droites (AG) et (EI) sont (a) coplanaires (b) non coplanaires
4. Les droites (BH) et (EI) sont (a) coplanaires (b) non coplanaires
5. Les plans (EGB) et (ACH) sont (a) sécants (b) parallèles
6. Le point I appartient au plan (a) (EGB) (b) (DAG) (c) (EAC) (d) (HEF)

Exercice 9 $ABCDEFGH$ est un cube. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AE]$, $[AB]$, $[BC]$ et $[CG]$.

1. Quelle est la nature du quadrilatère $AILC$?
2. Démontrer que les droites (JK) et (AC) sont parallèles.
3. En déduire que les droites (JK) et (LI) sont parallèles.
4. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont coplanaires.
5. En déduire qu'elles sont sécantes en un point S.
6. Déterminer l'intersection des plans (BAF) et (BCF).
7. Démontrer que le point S appartient à la droite (BF).
8. Etudier la position relative des plans (ACH) et (BEG).
9. R désigne le centre de la face $(EFGH)$. Montrer que la droite (RL) et le plan (BAD) sont sécants.

Allez donc voir le devoir n° 1 en page 187.