Chapitre 1
Probabilités

I. Notations et rappels

Une expérience est dite aléatoire si son résultat n'est pas prévisible. L'ensemble des résultats possibles de l'expérience est appelé **ensemble fondamental** et noté ***E***. Il peut être fini ou infini.
Un **événement** est un sous ensemble de *E*. Lorsqu'on réalise l'expérience, l'événement ***A*** se produit si le résultat fait partie de *A*. L'ensemble vide, sous-ensemble de *E*, est dit *événement impossible* puisqu'il ne peut jamais se produire lors d'une expérience. *E*, vu comme un sous-ensemble de lui-même, est l'*événement certain* puisque toute expérience donne un résultat contenu dans *E*. Un sous-ensemble ne contenant qu'un seul résultat possible est dit *événement élémentaire*.
Les opérations ensemblistes peuvent s'appliquer aux événements et conduisent à de nouveaux événements. Si *A* et *B* sont des événements, $\boldsymbol{A \cap B}$ (lire *A* **et** *B*), $\boldsymbol{A \cup B}$ (lire *A* **ou** *B*) et $\complement A = \overline{A}$ (lire **non** *A*) sont aussi des événements. Si l'ensemble fondamental *E* est l'ensemble $\Re$ des nombres réels, certains sous-ensembles ne respectent pas cette règle : les événements ne peuvent être que des intervalles et des combinaisons d'intervalles.
Une **probabilité** associe un nombre compris entre 0 et 1 à chaque événement. La probabilité de l'événement impossible est nulle ; celle de l'événement certain est 1. La règle de base du calcul des probabilités indique que $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$. On peut en déduire que si les deux événements *A* et *B* sont incompatibles (ou exclusifs), c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$, alors $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$.
Probabilité conditionnelle : que devient la probabilité d'un événement *A* si on restreint la population sur laquelle est réalisée l'expérience à une sous-population définie par un autre événement *B* ?
Définition : $\mathbf{Pr}(\boldsymbol{A} / \boldsymbol{B}) = \dfrac{\mathbf{Pr}(\boldsymbol{A \cap B})}{\mathbf{Pr}(\boldsymbol{B})}$
$\Pr(A / B)$ se lit « probabilité de *A* si *B* », ou « probabilité de *A* chez les *B* », ou « probabilité de *A* sachant que *B* », etc.
Événements indépendants : la connaissance ou non de *B* n'influe pas sur la probabilité de *A*, soit $\Pr(A / B) = \Pr(A)$. ou encore $\mathbf{Pr}(\boldsymbol{A \cap B}) = \mathbf{Pr}(\boldsymbol{A})\mathbf{Pr}(\boldsymbol{B})$.
Théorème de la multiplication : $\mathbf{Pr}(\boldsymbol{A \cap B}) = \mathbf{Pr}(\boldsymbol{A / B})\mathbf{Pr}(\boldsymbol{B}) = \mathbf{Pr}(\boldsymbol{B / A})\mathbf{Pr}(\boldsymbol{A})$
Formule de Bayes : $\mathbf{Pr}(\boldsymbol{B / A}) = \dfrac{\mathbf{Pr}(\boldsymbol{A/B})\mathbf{Pr}(\boldsymbol{B})}{\mathbf{Pr}(\boldsymbol{A})}$
Probabilités totales. On suppose que l'ensemble fondamental *E* est divisé en sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tels que deux quelconques d'entre eux soient exclusifs et qu'ils couvrent tout *E* (on dit qu'ils forment une partition de *E*). Considérons un autre événement quelconque *B*.
Alors $\mathbf{Pr}(\boldsymbol{B}) = \mathbf{Pr}(\boldsymbol{B / A_1})\mathbf{Pr}(\boldsymbol{A_1}) + \mathbf{Pr}(\boldsymbol{B / A_2})\mathbf{Pr}(\boldsymbol{A_2}) + \ldots + \mathbf{Pr}(\boldsymbol{B / A_n})\mathbf{Pr}(\boldsymbol{A_n})$
Autre forme : $\Pr(B) = \Pr(B \cap A_1) + \Pr(B \cap A_2) + \ldots + \Pr(B \cap A_n)$
Théorème de Bayes. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de E, pour tout A_i on a :
$$\mathbf{Pr}(\boldsymbol{A_i / B}) = \frac{\mathbf{Pr}(\boldsymbol{B/A_i})\mathbf{Pr}(\boldsymbol{A_i})}{\mathbf{Pr}(\boldsymbol{B/A_1})\mathbf{Pr}(\boldsymbol{A_1}) + \mathbf{Pr}(\boldsymbol{B/A_2})\mathbf{Pr}(\boldsymbol{A_2}) + \cdots + \mathbf{Pr}(\boldsymbol{B/A_n})\mathbf{Pr}(\boldsymbol{A_n})}$$

II. Exercices

Exercice 1 [**]

Corrigé page 15

On s'intéresse à l'âge de survenue d'une maladie en fonction du sexe des malades. Dans la population des malades, on note les événements de la manière suivante :

- H : le malade est un homme
- F : la malade est une femme
- J : la maladie est apparue chez un patient jeune
- M : la maladie est apparue à un âge moyen
- A : la maladie est apparue chez un sujet âgé.

On a les informations suivantes :
$Pr(H) = 0,5$; $Pr(J) = 0,4$; $Pr(J \cap H) = 0,2$

A. Les événements J et H sont indépendants
B. Les événements J et F ne sont pas indépendants
C. L'événement $(M \cup A)$ est indépendant de l'événement H
D. Pour que les événements A et F soient indépendants, il suffit que M et F le soient
E. Pour que les événements A et F soient indépendants, il faut que M et F le soient

Exercice 2 [*]

Corrigé page 15

Pour deux événements A et B, la relation $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B)$

A. n'est jamais possible
B. nécessite que $Pr(A \cap B) = 0$
C. est obtenue dès qu'un des deux événements est impossible
D. est obtenue dès que A et B sont indépendants
E. est obtenue si A et B sont exclusifs

Exercice 3 [**]

Corrigé page 15

On considère 2 événements A et B sur un même ensemble fondamental E, tels que la probabilité de A ne change pas si on apprend que B ne s'est pas produit.

A. A et B sont indépendants
B. A et B sont incompatibles
C. $Pr(A / B) = Pr(A / \overline{B})$
D. $Pr(\overline{A}) = Pr(\overline{A} / B)$
E. $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B)$

Exercice 4 [***]

Corrigé page 16

On lance deux pièces de monnaie.

A. L'événement « obtenir pile sur la première pièce » est indépendant de l'événement « obtenir face sur la seconde pièce »
B. L'événement « obtenir pile sur les deux pièces » est indépendant de l'événement « obtenir face sur les deux pièces »
C. Sachant qu'on a obtenu pile pour l'une des pièces, la probabilité d'obtenir face pour l'autre est 1/3
D. Sachant qu'on a obtenu pile pour l'une des pièces, la probabilité d'obtenir face pour l'autre est 1/2
E. Sachant qu'on a obtenu pile pour l'une des pièces, la probabilité d'obtenir face pour l'autre est 2/3

Exercice 5 [*]

Corrigé page 16

Chaque année, il y a une épidémie de syndromes grippaux. On suppose qu'elle touche en moyenne 15 % de la population, et que le fait d'avoir eu un syndrome grippal une année ne modifie pas le risque d'en avoir un l'année suivante (« pas d'immunité acquise »)

A. L'énoncé indique que les événements « avoir un syndrome grippal en 2004 » et « avoir un syndrome grippal en 2003 » sont des événements indépendants
B. La probabilité pour un sujet d'avoir eu un syndrome grippal en 2003 et à nouveau un syndrome grippal en 2004 est 30 % (=0,30)
C. La probabilité pour un sujet d'avoir eu un syndrome grippal en 2003 ou en 2004 est 30 %
D. La probabilité pour un sujet d'avoir eu un syndrome grippal en 2003 ou en 2004 est 15 %
E. Les sujets ayant eu un syndrome grippal en 2003 avaient 85 chances sur 100 de ne pas en avoir en 2004

Exercice 6 [*]

Corrigé page 16

Après avoir pratiqué un nombre très élevé de scanners dans la population des fumeurs de 50 à 55 ans, on considère que l'on dispose des probabilités suivantes :

- 30 % des fumeurs présentent une anomalie au scanner (avoir une anomalie au scanner est noté A).
- 20 % des fumeurs indiquent tousser régulièrement (tousser régulièrement est noté T).
- 10 % des fumeurs présentent une anomalie (A) et indiquent tousser régulièrement (T).

A. Les événements A et T sont indépendants
B. Les événements A et T sont incompatibles
C. La moitié des sujets indiquant tousser régulièrement ont une anomalie au scanner
D. Le tiers des sujets indiquant tousser régulièrement ont une anomalie au scanner
E. Le dixième des sujets indiquant tousser régulièrement ont une anomalie au scanner

Exercice 7 [**]

Corrigé page 17

Parmi les cas graves d'une maladie, 33 % sont hospitalisés. Les enfants constituent 20 % des cas graves hospitalisés. Que représentent les enfants hospitalisés parmi les cas graves (arrondis au % près) :

A. 7 %
B. 20 %
C. 33 %
D. 53 %
E. 66 %

Exercice 8 [***]

Corrigé page 17

On sait que lors d'un concours sélectif dans une certaine université, la réussite est obtenue par 21 % des filles qui s'y présentent mais seulement par 14 % des garçons. Parmi les étudiants qui ont réussi le concours, la proportion de filles est de 75 %.

A. La probabilité d'être une fille et de réussir le concours est 0,21
B. La probabilité de réussir le concours si on est une fille est 0,21
C. La proportion de filles se présentant au concours est 1/2
D. La proportion de filles se présentant au concours est 2/3
E. La proportion de filles se présentant au concours est 3/4

Exercice 9 [**]

Corrigé page 17

La proportion de femmes enceintes parmi les personnes décédées d'une certaine maladie est de 10 %. Dans la population générale, 1 % des femmes sont enceintes. On s'intéresse à la probabilité de décéder de la maladie pour les femmes enceintes.

A. Elle ne peut être calculée, mais le pourrait si la probabilité de décéder de la maladie dans l'ensemble de la population était connue
B. Elle ne peut être calculée mais le pourrait si la fréquence de la maladie dans la population (sa prévalence) était connue
C. Elle est 10 fois plus grande que la probabilité de décéder de la maladie dans la population générale
D. Elle est 10 fois plus petite que la probabilité de décéder de la maladie dans la population générale
E. Elle vaut 0,01

Exercice 10 [***]

Corrigé page 18

Un enfant naît à terme s'il naît au bout de 38 semaines d'aménorrhée au moins (événement T) ; il naît avant terme sinon. L'événement « naître avant terme » est noté AT.
Une grossesse est dite « unique » si la mère ne porte qu'un seul fœtus (événement noté U). Sinon, la grossesse est dite « multiple » (événement M).
La probabilité de naissance avant terme est de 5 % pour une grossesse unique et de 45 % pour une grossesse multiple.
1. On s'intéresse à une population dans laquelle le taux de grossesses multiples est de 10 %.

A. La probabilité 45 % donnée ci-dessus est Pr(AT ∩ M)
B. La probabilité 45 % donnée ci-dessus est Pr(AT / M)
C. La probabilité 45 % donnée ci-dessus est Pr(M / AT)
D. La probabilité de naissance avant terme est 7 %
E. La probabilité de naissance avant terme est 9 %

2. On suppose toujours que le taux de grossesses multiples est de 10 %.

A. La probabilité qu'il s'agisse d'une grossesse multiple en cas de naissance avant terme est comprise entre 0,45 et 0,55
B. La probabilité qu'il s'agisse d'une grossesse multiple en cas de naissance avant terme est comprise entre 0,25 et 0,35
C. La probabilité qu'il s'agisse d'une grossesse multiple en cas de naissance à terme est comprise entre 0,02 et 0,04
D. La probabilité qu'il s'agisse d'une grossesse multiple en cas de naissance à terme est comprise entre 0,05 et 0,07
E. La probabilité qu'il s'agisse d'une grossesse multiple en cas de naissance à terme est comprise entre 0,08 et 0,10

3. On suppose maintenant que dans la population générale la probabilité de naissance avant terme est de 0,07. On veut recalculer le taux de grossesses multiples dans cette population.

A. Pr(M) ≥ 0,15
B. Pr(M) = 0,10
C. Pr(M) = 0,05
D. Pr(M) = 0,02
E. Pr(M) < 0,01

Exercice 11 [****]

Corrigé page 18

Une région possède 3 maternités M1, M2 et M3. Les taux de césariennes sont de 20 % pour M1, 30 % pour M2, et 40 % pour M3. Après une césarienne il y a des complications dans 20 % des cas, quelle que soit la maternité. Pour un accouchement sans césarienne, les taux de complications sont de 10 % dans M3, 20 % dans M2 et 30 % dans M1.
On sait de plus que la maternité M1 accueille 40 % des accouchements, M2 30 %, et M3 les 30 % restants.
Les calculs seront arrondis à deux décimales.
1. On s'intéresse aux césariennes

A. Le taux de césariennes dans la région est 0,20
B. Le taux de césariennes dans la région est 0,30
C. Lorsqu'une femme de la région a eu une césarienne, la probabilité qu'elle vienne de M1 est 0,28
D. Lorsqu'une femme de la région a eu une césarienne, la probabilité qu'elle vienne de M2 est 0,35
E. Lorsqu'une femme de la région a eu une césarienne, la probabilité qu'elle vienne de M3 est 0,41

2. On étudie maintenant les complications dans chaque maternité

A. Le taux de complications dans la maternité M1 est 0,25
B. Le taux de complications dans la maternité M1 est 0,28
C. La maternité ayant le plus faible taux de complications est M1
D. La maternité ayant le plus faible taux de complications est M2
E. La maternité ayant le plus faible taux de complications est M3

3. On étudie enfin les complications dans l'ensemble de la région

A. Le taux de complications dans la région est compris entre 0,21 et 0,22
B. Le taux de complications dans la région est compris entre 0,27 et 0,28
C. Lorsqu'une femme a eu des complications lors d'un accouchement dans la région, la probabilité qu'elle vienne de M1 est comprise entre 0,2 et 0,4
D. Lorsqu'une femme a eu des complications lors d'un accouchement dans la région, la probabilité qu'elle vienne de M1 est comprise entre 0,5 et 0,7
E. Lorsqu'une femme a eu des complications lors d'un accouchement dans la région, elle vient le plus probablement de M2

Exercice 12 [****]

Corrigé page 20

La population comporte environ 40 % de fumeurs. Les 75 % de fumeurs qui finissent par s'arrêter voient alors leur poids augmenter. 15 % d'entre eux voient même leur poids augmenter d'au moins 10 kg.
1. En notant A l'événement « avoir été fumeur et s'être arrêté » et dp l'événement « voir son poids augmenter d'au moins 10 kg », on a :

A. $Pr(A) = 0,75$
B. $Pr(dp \cap A) = 0,045$
C. $Pr(dp \cap A) = 0,15$
D. $Pr(dp / A) = 0,045$
E. $Pr(dp / A) = 0,15$

2. Une prise de poids de plus de 10 kg conduit à une augmentation de 70 % du risque de diabète de type 2 par rapport au reste de la population française. En notant d2 la présence de diabète de type 2, et $dpA = dp \cap A$, on a donc $Pr(d2 / dpA) = 1{,}7Pr(d2 / \text{non } dpA)$.
La prévalence du diabète de type 2 dans la population sera prise égale à 10 %.

A. $Pr(d2 / dpA) = 1 – Pr(d2 / \text{non } dpA)$
B. $Pr(dpA / d2) = 1 – Pr(\text{non } dpA / d2)$
C. $0,096 \leq Pr(d2 / dpA) \leq 0,098$
D. $0,164 \leq Pr(d2 / dpA) \leq 0,166$
E. $0,370 \leq Pr(d2 / dpA) \leq 0,372$

Exercice 13 [****]

Corrigé page 20

Dans un service d'un hôpital, les patients peuvent avoir la maladie M1, ou la maladie M2, mais pas les deux simultanément. Ils peuvent aussi être indemnes de ces deux maladies, et on note S ce type de patients. On donne $Pr(M1) = 0,2$ et $Pr(M2) = 0,4$.
Ces patients peuvent présenter deux signes A ou B. Pour les patients atteints de M1, A est présent dans 30 % des cas, B dans 20 % des cas et les deux signes sont présents simultanément dans 6 % des cas. Pour les patients atteints de M2, A est présent dans 50 % des cas, B dans 30 % des cas.
Les deux signes A et B étant difficiles à discerner, on sait seulement que :
$Pr(A \cup B) = 0,4$ et $Pr[M2 / (A \cup B)] = 0,55$.

On peut en déduire

A. M1 et M2 sont indépendantes
B. La probabilité d'avoir M1 pour un patient présentant « A ou B » ($A \cup B$) est 0,22
C. La probabilité d'avoir M1 pour un patient présentant « A ou B » est 0,44
D. La probabilité de présenter simultanément A et B pour un patient atteint de M2 est 0,25
E. La probabilité de présenter simultanément A et B pour un patient atteint de M2 est 0,55

2. On admet que les événements « présenter A » et « être atteint de M1 » sont indépendants, et de même que « présenter B » et « être atteint de M2 » sont indépendants.

A. Les événements « présenter A » et « être atteint de M2 » sont indépendants
B. La probabilité d'être atteint de M2 si on présente A est 0,667 (arrondie à la troisième décimale)
C. La probabilité de n'être atteint ni de M1 ni de M2 (patient S) si on présente B est 0,3
D. Si A et B ne peuvent pas être discernés, c'est M1 qui est le plus probable lorsqu'on observe $A \cup B$
E. Si on reconnaît la présence de B, il s'agit le plus probablement d'un patient S.

3. On suppose maintenant savoir reconnaître la présence ou non du signe A et on voudrait savoir dans quelle mesure ce signe permet de séparer les patients S des patients atteints de M1 ou de M2 ($M1 \cup M2$).

A. La probabilité qu'un patient soit atteint de M1 ou M2 si le signe A est présent est comprise entre 0,8 et 0,9
B. La probabilité que le signe A soit absent pour un patient S est comprise entre 0,6 et 0,8
C. La probabilité que le signe A soit absent pour un patient S est supérieure ou égale à 0,8
D. La probabilité que le signe A soit présent pour un patient atteint de M1 ou M2 est comprise entre 0,4 et 0,5
E. La probabilité que le signe A soit présent pour un patient atteint de M1 ou M2 est comprise entre 0,5 et 0,75

Exercice 14 [***]

Corrigé page 21

Dans cet exercice, les valeurs sont données avec une précision maximale de 3 chiffres après la virgule.

On s'intéresse à une population de femmes atteintes d'un cancer du sein. Le taux de survie 5 ans après la découverte du cancer est de 65 %.
Lors de la découverte du cancer, on peut définir la gravité du cancer par son stade (1 à 4). 45 % des femmes sont de stade 1, 30 % de stade 2, 15 % de stade 3, et 10 % de stade 4.
1. La probabilité qu'une femme de cette population soit de stade 4 et survive au moins 5 ans est 0,03.

A. La probabilité de survivre au moins 5 ans pour une femme de stade 4 est 0,03
B. La probabilité de survivre au moins 5 ans pour une femme de stade 4 est 0,065
C. 70 % des femmes de stade 4 décèdent dans les 5 ans après la découverte de leur cancer
D. En cas de décès dans les 5 ans, la probabilité que la femme ait été de stade 4 est 0,20
E. En cas de décès dans les 5 ans, la probabilité que la femme ait été de stade 4 est 0,954

2. Le taux de survie à 5 ans est de 50 % chez les stades 3

A. La probabilité qu'un cancer soit de stade 3 avec une survie d'au moins 5 ans est 0,5
B. La probabilité qu'un cancer soit de stade 3 avec une survie d'au moins 5 ans est 0,075
C. La probabilité qu'un cancer soit de stade 3 ou 4 avec une survie d'au moins 5 ans est 0,105
D. La probabilité de survivre au moins 5 ans pour une femme de stade 3 ou 4 est 0,105
E. La probabilité de survivre au moins 5 ans pour une femme de stade 3 ou 4 est 0,42

3. Le taux de survie à 5 ans est de 80 % chez les stades 1

A. La probabilité qu'une femme soit de stade 2 et survive au moins 5 ans est 0,185
B. La probabilité qu'une femme soit de stade 2 et survive au moins 5 ans est 0,195
C. La probabilité de survivre au moins 5 ans pour une femme de stade 2 est 0,195
D. La probabilité de survivre au moins 5 ans pour une femme de stade 2 est 0,617
E. En cas de décès dans les 5 ans, la probabilité que la femme ait été de stade 2 est comprise entre 0,41 et 0,42