

Chapitre 1

Magnétostatique

I. Généralités et définitions

Les propriétés électriques et magnétiques de la matière ont été révélées par l'observation de forces :

Si, à un endroit, une **charge fixe** subit une force, il existe à cet endroit un champ électrique dont l'intensité est le rapport entre l'intensité de la force et la charge :

$$\text{Champ électrique} = \frac{\text{Force}}{\text{Charge}}$$

Si, à un endroit, une **charge mobile** subit une force, il existe à cet endroit un champ magnétique dont l'intensité est le rapport entre l'intensité de la force et le produit de la charge par la vitesse :

$$\text{Champ magnétique} = \frac{\text{Force}}{\text{Charge} \times \text{vitesse}}$$

Magnétisme et magnétostatique

Le magnétisme est l'étude des aimants, objets capables de produire un champ magnétique et, par conséquent, des forces magnétiques. La magnétostatique est l'étude des aimants dont les propriétés ne varient pas dans le temps.

Exemples d'aimants

- Cristal de magnétite, un oxyde de fer (Fe_3O_4)
- Barreau magnétique
- Aimant en U
- Aiguille aimantée

Du concept de champ magnétique donné ci-dessus, il s'ensuit que les objets suivants, portant des charges en déplacement ou des courants, sont des aimants :

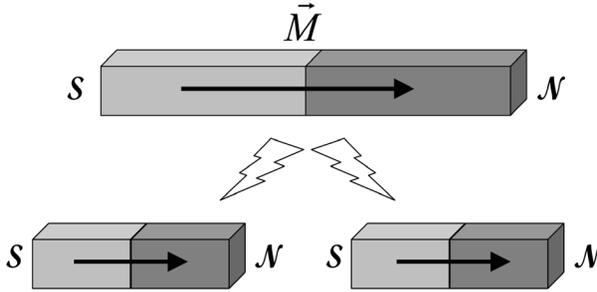
- Charges en déplacement rectiligne
- Charges en déplacement circulaire
- Courant dans un circuit rectiligne
- Courant dans un circuit circulaire

Ce dernier circuit, notamment la spire de courant, permet de décrire commodément les propriétés des aimants.

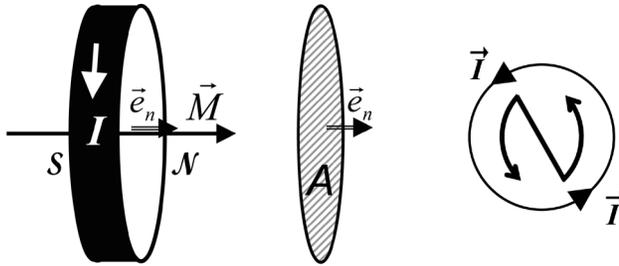
Propriétés des aimants

Il s'agit de di-pôles comportant un pôle Sud (noté \mathcal{S}) et un pôle Nord (noté \mathcal{N}). Ces 2 pôles sont matériellement inséparables. Si l'on coupe un aimant en 2, il s'en forme 2 de moment magnétique réduit en proportion.

Un exemple typique d'aimant est le barreau magnétique figuré ci-dessous :



Un autre type d'aimant est la spire de courant :



La grandeur qui définit l'aimant est le **Moment magnétique**, M , un vecteur dont l'intensité est :

$$M = \text{Courant} \times \text{Surface entourée par le courant} = I \times A$$

où I est l'intensité du courant dans la spire (en ampère, A) et A la surface entourée par le courant (en m^2). La direction du moment magnétique est donnée par la direction normale à la surface entourée par le courant.

Le sens du moment magnétique de la spire est \mathcal{S} - \mathcal{N} . Il est donné par la règle schématisée à droite de la figure où les branches de la lettre « \mathcal{N} » pour « Pôle Nord » sont orientées dans le sens du courant. Ce sens définit aussi le vecteur unitaire normal à la surface,

\vec{e}_n :

$$\vec{M} = I \times A \times \vec{e}_n$$

Comme le montre l'expression de M , l'unité d'intensité de moment magnétique est l'ampère par mètre-carré ($\text{A} \cdot \text{m}^2$).

Si plusieurs spires sont assemblées en série, le moment magnétique du système de N spires est :

$$\vec{M} = N \times I \times A \times \vec{e}_n$$

Champ magnétique

Tout aimant crée dans l'espace autour de lui une zone où peuvent apparaître des forces magnétiques. Dans cette zone existe un champ magnétique. Le champ magnétique est un vecteur. À la différence d'une grandeur scalaire quantitativement caractérisée par un seul nombre, un vecteur est quantitativement caractérisé par 3 chiffres, ses 3 coordonnées dans l'espace. Soit \vec{B} le vecteur champ magnétique de composantes orthogonales B_x , B_y , et B_z . On a :

$$\vec{B} = B_x \times \vec{e}_x + B_y \times \vec{e}_y + B_z \times \vec{e}_z$$

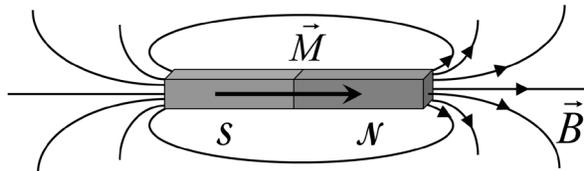
où \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z sont les vecteurs unitaires des axes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$.

Alternativement, on peut décrire le vecteur \vec{B} par 3 données :

- l'intensité : $|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$
- la direction
- le sens.

Le champ magnétique circule le long de lignes centrées sur l'aimant dites lignes de force, sur lesquelles il varie en intensité, direction et sens.

Les lignes de force ont typiquement l'allure suivante :



Ces lignes de forces peuvent être matérialisées par la dispersion de limaille de fer autour de l'aimant. Les paillettes de fer s'aimantent, s'orientent dans la direction du champ magnétique là où elles se trouvent et donnent une image de la circulation du champ.

L'intensité du champ magnétique, comme on va le voir plus loin, varie comme le rapport de l'intensité du moment magnétique, M , à la distance à l'aimant, r :

$$B \propto \frac{M}{r^3}$$

Cette expression permet de définir l'ancienne unité d'intensité de champ magnétique, l'ampère par mètre ($A.m^{-1}$). Cette unité a été remplacée par le **tesla (T)**. La conversion des unités se fait de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Champ(T) &= 4. \pi. 10^{-7} \times Champ(A.m^{-1}) \\ &= 1,26. 10^{-6} \times Champ(A.m^{-1}) \end{aligned}$$

La constante de conversion est la perméabilité magnétique du vide, μ_0 :

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4. \pi. 10^{-7} \text{ MKSA} \\ \text{d'où : } 1 \text{ tesla} &\approx 8. 10^5 \text{ A.m}^{-1} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le tesla est une unité élevée d'intensité de champ magnétique et on est conduit fréquemment à utiliser des sous-unités :

$$1 \text{ mT} = 10^{-3} \text{ T}$$

$$1 \mu\text{T} = 10^{-6} \text{ T}$$

$$1 \text{ nT} = 10^{-9} \text{ T}$$

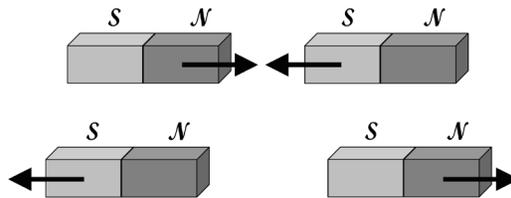
$$1 \text{ pT} = 10^{-12} \text{ T}$$

Ci-dessous, l'ordre de grandeur d'intensités de champs magnétiques de très basse fréquence et permanents :

Source-Aimant	Intensité (T)
Neurones	10^{-14}
Coeur	10^{-11}
Surface terre	$5 \cdot 10^{-5}$
Aimant en U	$1 \cdot 10^{-3}$
Cyclotron médical	1 à 2
Imagerie RMN	0,5 à 3
Spectroscopie RMN	5 à 20

Forces magnétiques

Les aimants produisent un champ magnétique dont l'existence est matérialisée par des forces. Si 2 aimants se présentent le même pôle \mathcal{S} et \mathcal{S} ou \mathcal{N} et \mathcal{N} , les 2 aimants sont soumis à des forces répulsives. Au contraire, si 2 aimants se présentent des pôles opposés \mathcal{S} et \mathcal{N} ou \mathcal{N} et \mathcal{S} , les 2 aimants sont soumis à des forces attractives.



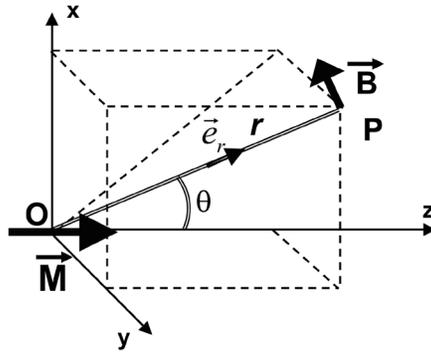
II. Calcul du champ magnétique

Le calcul du champ magnétique dans un cadre général sort des objectifs de ce recueil. On considèrera :

- Le champ créé par un moment magnétique, en choisissant le plus simple d'entre eux, le dipôle magnétique
- Le champ créé par des courants dans des circuits rectilignes et circulaires et des charges mobiles.

1. Champ créé par un dipôle magnétique

Un dipôle magnétique est une source magnétique de dimensions infinitésimales.



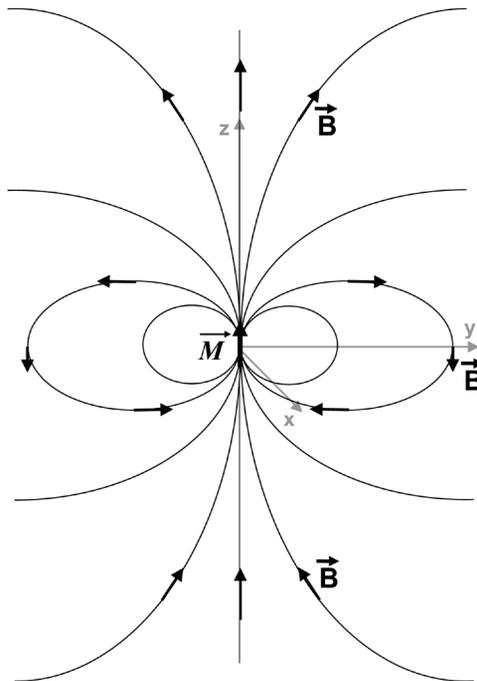
L'intensité et la composante sur l'axe $z'Oz$ du champ créé en un point P , situé à la distance r du dipôle et tel que la direction de OP fait un angle θ avec la direction du moment magnétique s'expriment par :

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4 \times \pi} \times M \times \frac{1}{r^3} \times (3 \times \cos^2(\theta) + 1)^{1/2}$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4 \times \pi} \times M \times \frac{1}{r^3} \times (3 \times \cos^2(\theta) - 1)$$

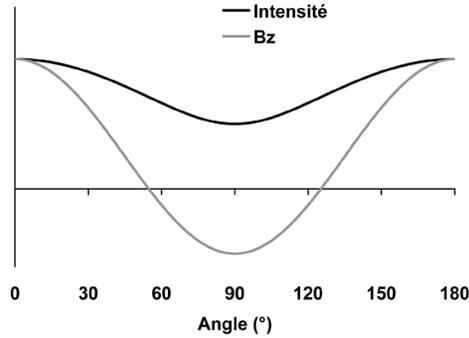
Ces **expressions** sont également **valables** pour tout champ magnétique calculé à une distance $r \gg d$ où d représente les dimensions d'un aimant ou d'un circuit de courant quelconques.

La direction et le sens du champ magnétique créé par le dipôle sont visualisables par le diagramme des lignes de force :



Le champ magnétique est tangent en tout point des lignes de forces. Ce diagramme est de révolution autour de l'axe $z'Oz$.

Comme on le voit dans les expressions précédentes, le champ varie sinusoïdalement avec l'angle θ .



Le module du champ passe par un minimum pour $\theta = 90^\circ$ (le champ est alors perpendiculaire à la direction du moment) et un maximum pour $\theta = 0^\circ$ (le champ est alors dans l'axe du moment) :

$$B_z(0^\circ) = \frac{\mu_0}{2 \times \pi} \times M \times \frac{1}{r^3} \quad \text{et} \quad \left| \vec{B}(0^\circ) \right| = \frac{\mu_0}{2 \times \pi} \times M \times \frac{1}{r^3}$$

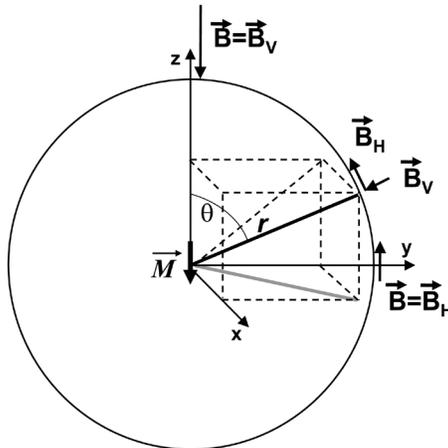
$$\text{avec } B_x(0^\circ) = B_y(0^\circ) = 0$$

$$B_z(90^\circ) = -\frac{\mu_0}{4 \times \pi} \times M \times \frac{1}{r^3} \quad \text{et} \quad \left| \vec{B}(90^\circ) \right| = \frac{\mu_0}{4 \times \pi} \times M \times \frac{1}{r^3}$$

$$\text{avec } B_x(90^\circ) = B_y(90^\circ) = 0$$

Modèle du dipôle et champ magnétique terrestre

Le champ magnétique à la surface de la terre peut être considéré comme créé par un dipôle situé au centre de la terre. Une erreur historique sur le sens du dipôle fait que son orientation physique réelle est en opposition avec les appellations géographiques. Le champ magnétique terrestre que l'on détecte par une boussole correspond à la composante horizontale, $|B_H|$ du champ magnétique, en fait tangentielle à la surface de la terre. L'autre composante du champ magnétique terrestre est la composante verticale, $|B_V|$.



On a les relations :

$$|B_H| = \frac{\mu_0}{4 \times \pi} \times \frac{M}{R_{terre}^3} \times |\sin(\theta)|$$

$$|B_V| = \frac{\mu_0}{2 \times \pi} \times \frac{M}{R_{terre}^3} \times |\cos(\theta)|$$

$$|B| = \sqrt{B_H^2 + B_V^2}$$

À l'équateur, la composante horizontale correspond à $|B_{xz}|$, alors qu'aux pôles, elle correspond à $|B_{xy}|$. À l'équateur, on a pour la composante horizontale $|B_{x,z}| = \sqrt{B_x^2 + B_z^2} = |B_z(90^\circ)| = \frac{\mu_0}{4 \times \pi} \times \frac{M}{R_{terre}^3}$, où M est le moment magnétique de la terre et R_{terre} , le rayon de la terre. Aux pôles, on a pour la composante horizontale $|B_{x,y}| = 0$.

Angle magique

Deux dipôles statiques vont créer l'un sur l'autre un champ qui interagit avec le moment magnétique local en modifiant son énergie potentielle (voir plus loin). Cet effet diminue le signal recueilli en spectroscopie RMN ou en IRM. Or la composante B_z créée par

chaque dipôle peut disparaître si : $(3 \times \cos^2(\theta) - 1) = 0$.

Ceci correspond à un angle θ , de :

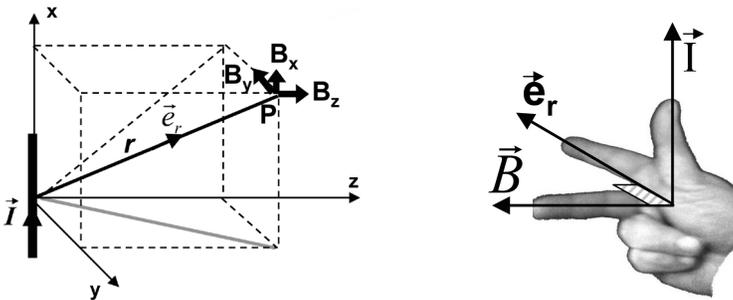
$$\theta = \text{Arccos} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 54,7^\circ$$

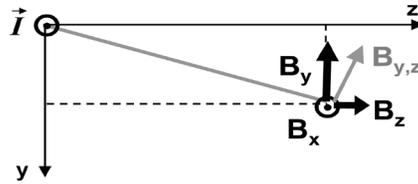
Cet angle porte le nom d' « angle magique ».

En spectroscopie RMN ou IRM, on peut être amené à utiliser la notion d' « angle magique » pour tenter de supprimer les interactions entre dipôles dans des milieux biologiques solides. Ces interactions disparaissent spontanément dans un milieu liquide où les molécules ne sont pas statiques mais en mouvement permanent (agitation thermique).

2. Loi de Biot et Savart

Cette loi permet de calculer le champ magnétique produit par un **courant dans un circuit**.





Le champ créé en un point P par un élément de circuit traversé par un courant a une intensité qui dépend :

- de la géométrie du circuit
- du courant
- de la distance entre le point P et le circuit centré sur le point O

La direction et le sens du champ sont donnés par la règle des 3 doigts de la main droite, comme dans la figure ci-dessus en haut et à droite, où \vec{I} indique la direction du courant dans le segment de circuit, \vec{e}_r celle du vecteur unitaire de la direction $OP = r$ et \vec{B} celle du champ magnétique. La direction de \vec{B} est donc perpendiculaire au plan formé par la direction du segment de circuit et la direction du segment OP . Un vecteur représenté par le symbole \odot est orienté d'arrière en avant du plan de la page ; un vecteur représenté par le symbole \otimes est orienté d'avant en arrière.

Le champ \vec{B} possède 3 composantes B_x , B_y , et B_z :

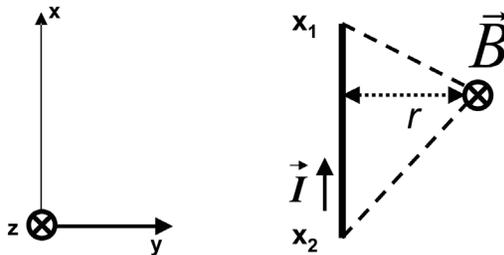
$$\vec{B} = B_x \times \vec{e}_x + B_y \times \vec{e}_y + B_z \times \vec{e}_z$$

où \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z sont les vecteurs unitaires des axes $x'Ox$, $y'Oy$ et $z'Oz$.

Lorsque l'élément de circuit porteur du courant I est considéré comme infinitésimal, la loi de Biot et Savart permet de calculer par intégration le champ créé en tout point de l'espace par un circuit de forme quelconque.

Champ créé par un segment de circuit rectiligne

Un fil de longueur $x_2 - x_1$ est traversé par un courant I . D'après la règle des 3 doigts de la main droite, le champ est perpendiculaire au plan formé par la direction du segment de circuit et la direction donnée par le centre du fil et le point où l'on calcule le champ.



L'intensité du champ selon l'axe $x'Ox$, à la distance r du segment rectiligne de courant varie comme représenté ci-dessous :