

Table des matières

Prologue autour de la mesure extérieure de Lebesgue	1
1 Autour de la mesure extérieure de Lebesgue	3
1.1 La mesure extérieure de Lebesgue	4
1.2 Les limites à l'additivité : la construction de Vitali	11
1.3 Vers une additivité « restreinte » : la mesurabilité	13
1.4 Tribus ; la tribu des boréliens	21
1.5 Régularité	25
1.6 Un théorème de (presque) recouvrement	34
1.7 Le théorème de densité de Lebesgue	40
1.8 Le théorème de dérivation de Lebesgue	45
1.9 Commentaires	51
1.9.1 Cantor, Jordan, Peano, Borel, Lebesgue et le « problème de la mesure »	51
1.9.2 Carathéodory : une nouvelle définition de la mesurabilité	62
1.9.3 Le « problème de la mesure » (suite) : la contribution « idéaliste » de Vitali	67
1.9.4 Lusin, Sierpinski, Steinhaus et la structure des ensembles de différences	73
1.9.5 Le théorème de densité de Lebesgue et la contribution de Vitali	75
1.10 Exercices	78

L'intégrale, de Riemann à Kurzweil et Henstock	89
2 L'intégrale de Riemann	91
2.1 Définitions et premières propriétés	92
2.2 Propriétés élémentaires	95
2.3 Le critère de Cauchy de R-intégrabilité	100
2.4 Un théorème élémentaire de convergence	105
2.5 Quelques caractérisations usuelles	106
2.6 Le critère de R-intégrabilité de Lebesgue-Vitali	114
2.7 Le théorème fondamental et la R-intégrale	117
2.8 Intégrales indéfinies	128
2.9 Commentaires	135
2.9.1 L'intégrale de Cauchy	135
2.9.2 De l'intégrale de Cauchy à l'intégrale de Riemann	140
2.9.3 Nouveaux essais de caractérisation et contre-exemples : de Hankel à Smith	147
2.9.4 Vers un nouveau critère d'intégrabilité : le résultat fondamental de Vitali et Lebesgue	156
2.9.5 Le <i>Mémoire</i> de Darboux : une présentation nouvelle de l'intégrale de Riemann	168
2.9.6 L'intégrale de Riemann et le théorème fondamental : de Cauchy à Volterra	171
2.10 Exercices	179
3 L'intégrale de Lebesgue	185
3.1 Fonctions mesurables : premières remarques	186
3.2 Propriétés élémentaires des fonctions mesurables	189
3.3 Mesurabilité et limites « presque partout »	193
3.4 Fonctions mesurables, boréliennes ou continues	196
3.5 Approximation des fonctions mesurables	202
3.5.1 Approximation par des fonctions continues	202
3.5.2 Approximation par des fonctions étagées	207
3.6 Intégrales de fonctions étagées	210
3.7 Fonctions intégrables au sens de Lebesgue	214
3.8 Le théorème de convergence monotone	221
3.9 D'autres théorèmes de convergence	226
3.10 Lien avec l'intégrale de Riemann	229
3.11 Un premier théorème fondamental	233
3.12 Une formule de changement de variable	235
3.13 Intégrales indéfinies : premières propriétés	237
3.14 Dérivabilité des intégrales indéfinies	243
3.15 Une caractérisation des intégrales indéfinies	248
3.16 Retour au théorème fondamental	251
3.17 Commentaires	253
3.17.1 D'une définition « géométrique » de l'intégrale de Riemann à la définition « géométrique » de l'intégrale de Lebesgue	253

3.17.2	Des fonctions de Baire aux fonctions mesurables : l'extension du domaine de l'analyse	257
3.17.3	Les théorèmes de Severini-Egoroff et de Lusin	260
3.17.4	Les théorèmes de convergence : un succès de la théorie	265
3.17.5	Le théorème fondamental, les fonctions à variation bornée et les fonctions absolument continues	269
3.18	Exercices	274
4	L'intégrale de Kurzweil et Henstock	279
4.1	Introduction : des partitions de pas variable	280
4.2	Le Lemme de Cousin	281
4.3	L'intégrale de Kurzweil et Henstock	284
4.4	Propriétés élémentaires	288
4.5	Critère de Cauchy et propriété de restriction	293
4.6	Intégration et égalité presque partout	294
4.7	Les P-divisions et le lemme de Saks-Henstock	296
4.8	Le théorème de Hake	299
4.9	Fonctions absolument intégrables	303
4.10	Lien avec la mesure extérieure	308
4.11	Théorèmes de convergence	311
4.12	Intégrales indéfinies	317
4.13	Intégrales indéfinies des fonctions absolument KH-intégrables	328
4.14	Lien avec l'intégrale de Lebesgue	331
4.15	Commentaires	332
4.15.1	Le « problème fondamental du calcul différentiel et intégral » et ses solutions par Denjoy et Perron	333
4.15.2	Le retour de l'intégrale de Perron en théorie des équations différentielles ordinaires : l'apport de Kurzweil et la découverte indépendante de Henstock	339
4.15.3	Les sommes de Riemann pour enseigner l'intégrale : les cours de J. Mawhin à l'université de Louvain	345
4.16	Exercices	347
	Annexes	353
A	Notations et rappels	355
A.1	Ensembles	355
A.2	Fonctions	356
A.3	Suites	358
A.4	Fonctions continues et dérivables	359
B	Solutions des exercices	361
B.1	Exercices du chapitre 1	361
B.2	Exercices du chapitre 2	381
B.3	Exercices du chapitre 3	397

B.4 Exercices du chapitre 4	412
Bibliographie	427
Ouvrages généraux sur l'intégration	427
Pour aller plus loin	428
Ouvrages et travaux mentionnés dans les commentaires	428
Index	433