HEC ESCP EM-Lyon 2012
Math. III

Durée : 4 heures

Exercice

Soit m un réel donné strictement positif et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$. Pour tout endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$, on pose $g^0 = id$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $g^k = g \circ g^{k-1}$.

1°) Déterminer le noyau $\operatorname{Ker} f$ et l'image $\operatorname{Im} f$ de l'endomorphisme f. La matrice M est-elle inversible ?

2°) a) Montrer que la matrice M^2 est combinaison linéaire de I et de M.

b) Déterminer un polynôme annulateur non nul de la matrice M.

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

3°) A l'aide des résultats de la question **2°) c)**, indiquer une méthode, sans faire les calculs, qui permettrait d'obtenir pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de n.

4°) On pose : $p = \frac{1}{3}(f + id)$ et $q = -\frac{1}{3}(f - 2id)$.

a) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$, puis pour tout n de $\mathbb{N}$, p^n et q^n.

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de f^n en fonction de p et q.

c) Déterminer les deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $M^n = a_n I + b_n M$.

d) La formule précédente reste-t-elle valable si n appartient à $\mathbb{Z}$?

Problème

Sous réserve d'existence, on note $E(U)$ et $V(U)$ respectivement, l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire U définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour p entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité $U_1, \ldots, U_p$ sont indépendantes si pour tout p-uplet $(u_1, \ldots, u_p)$ de réels, les événements $(U_1 \leqslant u_1), \ldots, (U_p \leqslant u_p)$ sont indépendants.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité. Les parties **I** et **II** sont largement indépendantes. La partie **III** est indépendante des parties **I** et **II**.

Partie I. Loi à 1 paramètre.

On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

1°) a) Montrer que la fonction f_λ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Dresser le tableau de variation de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_\lambda(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x)$.

c) Etablir la convexité de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

2°) a) Vérifier que la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Etablir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\,dx$ et calculer sa valeur.

c) En déduire que la fonction f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

3°) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs strictement positives, ayant f_λ pour densité.

On note F_λ la fonction de répartition de X et on pose $Y = \lambda\sqrt{X}$.

a) Calculer pour tout x réel, $F_\lambda(x)$.

b) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

c) Etablir, pour tout r de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $E(Y^r)$.

d) Montrer que pour tout r de $\mathbb{N}^*$, on a : $E(Y^{r+1}) = (r+1)E(Y^r)$.

e) En déduire pour tout r de $\mathbb{N}^*$, $E(Y^r)$ et $E(X^r)$. En particulier, calculer $E(X)$ et $V(X)$.

4°) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi que X. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 b_n = 0$.

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $M_n = \min\limits_{1\leq k\leq n}(X_k)$ et $J_n = \dfrac{M_n - b_n}{a_n}$.

On admet que M_n et J_n sont des variables aléatoires à densité définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Partie II. Estimation ponctuelle de $\boldsymbol{\lambda}$

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X définie dans la question **3°)**.

On rappelle que $Y = \lambda\sqrt{X}$, et on pose pour tout k de $[\![1,n]\!]$: $Y_k = \lambda\sqrt{X_k}$, $S_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j$ et g_k une densité de S_k.

On admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, les variables aléatoires $Y_1,\ldots,Y_n$ sont indépendantes et que pour tout k de $[\![1,n-1]\!]$, les variables aléatoires S_k et Y_{k+1} sont indépendantes.

On admet que si T et Z sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T (ou f_Z) soit bornée, alors la variable aléatoire $T+Z$ admet une densité f_{T+Z} définie pour tout x réel par : $f_{T+Z}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y)f_Z(x-y)\,dy$.

5°) a) En utilisant les propriétés admises, montrer que :

$$g_2(x) = \begin{cases} x.\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1}.\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

c) On admet que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{S_n}$ est une variable aléatoire à densité. Pour quelles valeurs de n, l'espérance $E(1/S_n)$ et la variance $V(1/S_n)$ existent-elles ? Calculer alors leurs valeurs respectives.

6°) On note $(x_1,\ldots,x_n)$ un n-uplet de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ constituant une réalisation du n-échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$. On suppose que le paramètre λ est inconnu.

Soit H la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $H(\lambda) = \ln\Big(\prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\Big)$.

Montrer que la fonction H admet un maximum atteint en un unique point λ_0 dont on donnera la valeur.

7°) On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $\lambda_n^* = \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{X_k}}$.

a) Que représente λ_0 pour λ_n^* ?

b) Construire à partir de λ_n^* un estimateur sans biais $\widehat{\lambda}_n$ de λ et calculer le risque quadratique $\rho(\widehat{\lambda}_n)$ de $\widehat{\lambda}_n$.

c) Calculer $\lim_{n\to\infty} \widehat{\rho}(\lambda_n)$. Commenter.

Partie III. Loi à 2 paramètres

8°) Soit λ et α deux paramètres réels strictement positifs et $f_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{(\lambda,\alpha)}(x) = \begin{cases} \lambda\alpha x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x^{\alpha}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

où $\exp$ désigne la fonction exponentielle.

a) Montrer que $f_{(\lambda,\alpha)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit W une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs strictement positives, de densité $f_{(\lambda,\alpha)}$.

On dit que W suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$.

b) On note $F_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction de répartition de W. Calculer pour tout x réel $F_{(\lambda,\alpha)}(x)$.

c) Montrer que la variable aléatoire $F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

d) Ecrire une fonction Pascal d'en-tête

```
functionW(lambda,alpha :real) :real ;
```

permettant de simuler W.

9°) Soit K une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs strictement positives, de densité f_K nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On note F_K la fonction de répartition de K.

On note pour tout x réel : $R(x) = \ln(1 - F_K(x))$ et $r(x) = R'(x)$ (où R' est la fonction dérivée de R).

a) On suppose dans cette question que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$, avec $\lambda > 0$. Etablir les propriétés i) et i) suivantes :

i) la fonction r est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et $r(0) = 0$.

ii) La variable aléatoire $r(K)$ suit la loi $\mathcal{WB}(\dfrac{1}{4\lambda}, 2)$.

b) Réciproquement, on suppose dans cette question que les propriétés i) et ii) sont vérifiées. Montrer que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$. Conclusion.

Dans les questions **10°**) et **11°**), l'entier n est supérieur ou égal à 2. On note $w_1, \ldots, w_n$ des réels strictement positifs et non tous égaux.

10°) Soit φ la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x) = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x (\ln w_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} - \dfrac{1}{x}$

a) Soit $y_1, \ldots, y_n$ des réels non tous nuls et $z_1, \ldots, z_n$ des réels quelconques. En étudiant la fonction polynomiale du second degré Q définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} (z_k - ty_k)^2$, établir l'inégalité : $\big(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k z_k\big)^2 \leqslant \big(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2\big)\big(\sum\limits_{k=1}^{n} z_k^2\big)$.

b) Montrer que la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) On note n_0 le nombre d'entiers k_0 de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $w_{k_0} = \max\limits_{1 \leq k \leq n} (w_k)$. Montrer que $1 \leqslant n_0 \leqslant n - 1$.

d) Donner un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x$ en fonction de n_0 et w_{k_0}, lorsque x tend vers $+\infty$.

e) Calculer en fonction de w_{k_0}, la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. (on distinguera les deux cas : $w_{k_0} = 1$ et $w_{k_0} \neq 1$)

f) En déduire que sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $\varphi(x) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln w_k)$ admet une unique solution.

11°) On note $(W_1, \ldots, W_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$ définie dans la question **8°**), dont une réalisation est le n-uplet $(w_1, \ldots, w_n)$. On suppose que les paramètres λ et α sont inconnus.

Soit G la fonction de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $G(\lambda, \alpha) = \ln\big(\prod\limits_{k=1}^{n} f_{(\lambda,\alpha)}(w_k)\big)$.

a) Montrer que la fonction G admet un unique point critique $(\widehat{\lambda}, \widehat{\alpha})$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

b) Montrer que la fonction G admet un maximum local au point $(\widehat{\lambda}, \widehat{\alpha})$.

Solution

Exercice

Question 1.

$\star$ Pour $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a : $f(v) = 0 \iff M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit :

$$v \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} \dfrac{1}{m}y + \dfrac{1}{m^2}z = 0 \\ mx + \dfrac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} my + z = 0 \\ m^2x + z = 0 \text{ (car } m \neq 0) \\ mx + y = 0 \end{cases}$$

Soit en résolvant les deux dernières équations et en reportant dans la première :

$$v \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} y = -mx \\ z = -m^2x \\ m(-mx) - m^2x = -2m^2x = 0 \end{cases}$$

La dernière équation donne donc $x = 0$, puis $y = z = 0$ et $v = 0$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \{0\}}$$

$\star$ Par le théorème du rang : $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3$, et comme $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3$, l'égalité des dimensions donne :

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3}$$

Ainsi f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, ce qui prouve que :

$$\boxed{M \in GL_3(\mathbb{R})}$$

Question 2.

a) Tranquillement : $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 2 & 1/m \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix}$, donc M^2 est bien combinaison linéaire de I et M, et plus précisément :

$$\boxed{M^2 = 2I + M}$$

b) On vient de montrer que $M^2 - M - 2I = 0$, donc :

$$\boxed{P = X^2 - X - 2 \text{ est annulateur de } M.}$$

[Notons que la matrice M n'est pas colinéaire à I, doonc (M, I) est une famille libre et si $\alpha M + \beta I$ est la matrice nulle, alors $\alpha = \beta = 0$, M n'a donc pas de polynôme annulateur du premier degré, et on ne peut pas faire mieux que ce qui est encadré juste au-dessus.]

c) Soit $\lambda \in \operatorname{Spec} M$ et V une colonne propre associée.

On a $MV = \lambda V$, donc $M^2V = MMV = M\lambda V = \lambda MV = \lambda^2 V$ et :

$$0 = (M^2 - M - 2I)V = M^2V - MV - 2V = (\lambda^2 - \lambda - 2)V$$

Comme V n'est pas la colonne nulle, on a $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2) = 0$, donc $\lambda \in \{-1, 2\}$.

Ainsi $\operatorname{Spec} M \subset \{-1, 2\}$, mais on ne sait pas si -1 et 2 sont effectivement valeurs propres et il nous font donc étudier ces deux cas.

Raisonnons plutôt sur f (pour écrire des vecteurs lignes, ce qui prend moins de place que des matrices colonnes . . .)

$\star$ Pour $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(v) = -v \iff \begin{cases} \dfrac{1}{m}y + \dfrac{1}{m^2}z = -x \\ mx + \dfrac{1}{m}z = -y \\ m^2x + my = -z \end{cases}$

Donc $f(v) = -v \iff z = -m^2x - my$, il existe des solutions autres que le vecteur nul, ce qui prouve que -1 est valeur propre de f (ou de M) et :

$$\begin{aligned} E_{(-1)}(f) &= \{(x, y, -m^2x - my), x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, -m^2) + y(0, 1, -m), x, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Les vecteurs $(1, 0, -m^2)$ et $(0, 1, -m)$ sont clairement non colinéaires, donc forment une base du plan $E_{(-1)}(f)$.

$\star$ Pour $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(v) = 2v \iff \begin{cases} \dfrac{1}{m}y + \dfrac{1}{m^2}z = 2x \\ mx + \dfrac{1}{m}z = 2y \\ m^2x + my = 2z \end{cases}$

$$f(v) = 2v \iff \begin{cases} -2m^2x + my + z = 0 \\ m^2x - 2my + z = 0 \\ m^2x + my - 2z = 0 \end{cases}$$

(on a simplement chassés les dénominateurs). Comme $L_3 = -L_1 - L_2$ la dernière équation est inutile et par la manipulation $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$:

$$f(v) = 2v \iff \begin{cases} -2m^2x + my + z = 0 \\ -3my + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = my \\ y = mx \end{cases} \iff \begin{cases} y = mx \\ z = m^2x \end{cases}$$

Cette équation a aussi des solutions autres que la solution nulle, donc 2 est aussi valeur propre et :

$$E_{(2)}(f) = \{(x, mx, m^2x), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, m, m^2), x \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi $E_{(2)}(f)$ est la droite engendrée par le vecteur $(1, m, m^2)$.

On a $\dim E_{(-1)}(f) + \dim E_{(2)}(f) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et donc f (ou M est diagonalisable.

Question 3.

On sait de plus que la famille $((1, 0, -m^2), (0, 1, -m), (1, m, m^2))$ qui est obtenue en mettant « bout-à-bout » une base de $E_{(-1)}(f)$ et de $E_{(2)}(f)$ est alors une base de $\mathbb{R}^3$ et si on note Pla matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à cette nouvelle base, on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m \\ -m^2 & -m & m^2 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}MP = D = \operatorname{diag}(-1, -1, 2)$$

D'où $M = PDP^{-1}$ et par l'argument de récurrence habituel dans ce domaine de la réduction :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}, \text{ avec } D^n = \operatorname{diag}((-1)^n, (-1)^n, 2^n)}$$

On nous fait grâce pour le moment du calcul explicite ...

Question 4.

a) $\star$ Comme $M^2 = M + 2I$, on a $f^2 = f + 2id$, soit $f^2 - f - 2id = 0$ et en factorisant :

$$(f + id) \circ (f - 2id) = (f - 2id) \circ (f + id) = 0$$

D'où, les facteurs $\frac{1}{3}$ étant sans importance ici :

$$\boxed{p \circ q = q \circ p = 0}$$

$\star$ Comme f et id commutent, on peut développer par la formule du binôme, et :

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{9}(f + id)^2 = \frac{1}{9}(f^2 + 2f + id) = \frac{1}{9}(f + 2id + 2f + id) \\ &= \frac{1}{3}(f + id) = p \\ q^2 &= \frac{1}{9}(f - 2id)^2 = \frac{1}{9}(f^2 - 4f + 4id) = \frac{1}{9}(f + 2id - 4f + 4id) \\ &= -\frac{1}{3}(f - 2id) = q. \end{aligned}$$

Donc p et q sont des projecteurs (on aurait aussi pu remarquer que $p + q = id$) et, par une récurrence élémentaire :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, p^n = p, q^n = q \text{ tandis que } p^0 = q^0 = id}$$

b) On a $f + id = 3p$ et $f - 2id = -3q$, donc en éliminant id entre ces deux relations : $f - 2(3p - f) = -3q$, soit :

$$f = 2p - q$$

Comme p et q commutent, on a pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$f^n = (2p - q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} p^k \circ q^{n-k}$$

Tout terme contenant à la fois les facteurs p et q est nul (car $p \circ q = q \circ p = 0$), donc ne survivent que les termes correspondant à $k = 0$ et $k = n$:

$$f^n = 2^n p^n + (-1)^n q^n$$

et comme $n \geqslant 1$, on a $p^n = p$ et $q^n = q$, donc :

$$\boxed{f^n = 2^n p^n + (-1)^n q^n}$$

On constate avec déplaisir que la formule ne reste pas valable pour $n = 0$, puisque $f^0 = p^0 = q^0 = id$ et $id \neq 2id + id$.

c) Avec $p = \frac{1}{3}(f + id)$ et $q = -\frac{1}{3}(f - 2id)$, il vient pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{f^n = \frac{2^n}{3}(f + id) - \frac{(-1)^n}{3}(f - 2id) = \frac{2^n - (-1)^n}{3} f + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} id}$$

Et cette fois, pour $n = 0$, la formule précédente donne $f^0 = 0 \times f + 1 \times id$ et comme $f^0 = id$ elle est donc encore valide (ouf !).

Donc en revenant à la notation matricielle : $\forall\, n \in \mathbb{N}, M^n = a_n I + b_n M$, avec :

$$\boxed{a_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \text{ et } b_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}}$$

d) Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ (donc n est un entier strictement négatif) et posons

$$g = 2^n p + (-1)^n q$$

On a : $g \circ f^{-n} = (2^n p + (-1)^n q) \circ (2^{-n} p + (-1)^{-n} q)$

(car on connaît f^{-n}, puisque $-n$ est un entier strictement positif)

On développe et comme $p \circ q = q \circ p = 0$, il reste :

$$g \circ f^{-n} = 2^n 2^{-n} p^2 + (-1)^n (-1)^{-n} q^2 = p + q = id$$

On peut calculer de même $f^{-n} \circ g$ qui vaut encore id.

Ainsi g est l'inverse de f^{-n}, donc vaut f^n, et la formule obtenue en **b)** est valable pour n entier strictement négatif. Comme on en déduit la formule obtenue en **c)**,celle-ci est finalement valable pour tout n de $\mathbb{Z}$:

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{Z}, M^n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I + \frac{2^n - (-1)^n}{3} M}$$

Problème

Partie I

Question 1.

a) $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, jamais nulle, la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Que demander de plus ? Par propriétés des opérations :

$$\boxed{f_\lambda \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)}$$

b) Soit $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ et $\psi : x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$.