

Exercice

Etant donné un entier n supérieur ou égal à 2, on considère un nuage de n points du plan, c'est-à-dire un n -uplet $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$ d'éléments de \mathbb{R}^2 . On suppose que les réels x_1, x_2, \dots, x_n (resp. y_1, y_2, \dots, y_n) ne sont pas tous égaux.

On appelle moyenne arithmétique notée \bar{x} et écart-type noté σ_x du n -uplet $x = (x_1, \dots, x_n)$, les réels suivants :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \text{ et } \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$$

On définit de même la moyenne arithmétique \bar{y} et l'écart-type σ_y du n -uplet $y = (y_1, \dots, y_n)$.

La covariance $\text{Cov}(x, y)$ et le coefficient de corrélation linéaire $r(x, y)$ du couple (x, y) sont donnés par :

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \text{ et } r(x, y) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \times \sigma_y}$$

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 à valeurs réelles qui, à tout couple (a, b) de \mathbb{R}^2 associe le réel $f(a, b)$ tel que $f(a, b) = \sum_{k=1}^n (ax_k + b - y_k)^2$.

1°) Justifier que f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

2°) a) Ecrire le système d'équations (S) permettant de déterminer les points critiques de f .

b) Résoudre le système (S) . En déduire que f admet un unique point critique (\hat{a}, \hat{b}) que l'on exprimera en fonction de $\bar{x}, \bar{y}, \sigma_x^2$ et $\text{Cov}(x, y)$.

c) Montrer que ce point critique correspond à un minimum local de f .

d) Etablir la formule suivante : $f(\hat{a}, \hat{b}) = n\sigma_y^2(1 - r^2(x, y))$.

3°) a) Montrer que l'on a : $|r(x, y)| \leq 1$.

b) Que peut-on dire du nuage de points lorsque $|r(x, y)| = 1$?

Problème

Dans tout le problème, N désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2, et p un réel fixé de l'intervalle $]0, 1[$, on pose : $q = 1 - p$. Soit n un entier naturel quelconque.

Dans une population de N individus, on s'intéresse à la propagation d'un certain virus. Chaque jour, on distingue dans cette population trois catégories d'individus : en premier lieu, les individus sains, c'est-à-dire ceux qui ne sont

pas porteurs du virus, ensuite les individus qui viennent d'être contaminés et qui sont inoffensifs pour les autres, et enfin les individus contaminés par le virus et qui sont contagieux.

Ces trois catégories évoluent jour après jour selon le modèle suivant :

- chaque jour n , chaque individu sain peut être contaminé par n'importe lequel des individus contagieux ce jour avec la même probabilité p , ces contaminations éventuelles étant indépendantes les unes des autres ;
- un individu contaminé le jour n devient contagieux le jour $n + 1$;
- chaque individu contagieux le jour n redevient sain le jour $n + 1$.

On note alors X_n le nombre aléatoire d'individus contagieux le jour n .

On remarquera que si, pour un certain naturel i , on a $X_i = 0$, alors on a aussi $X_{i+1} = 0$.

Les variables aléatoires $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ sont supposées définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , et $E(X_n)$ désigne, pour tout n de \mathbb{N} , l'espérance de X_n .

Partie I : un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que l'on a $N = 3$ et $p = 1/3$.

On considère les matrices R et S suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à quatre lignes est confondu avec l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 .

1°) Montrer que la matrice R est inversible et calculer son inverse R^{-1} .

2°) a) Montrer que les réels $-1, 0, 5$ et 9 sont des valeurs propres de S .

b) Calculer le produit matriciel $R^{-1}SR$.

c) En déduire, pour tout n de \mathbb{N} , l'expression de la matrice S^n en fonction de n (on pose $S^0 = I$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$).

3°) Soit n un entier fixé de \mathbb{N} .

a) Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 0]$.

b) Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 3]$.

c) Vérifier que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 1]$ (resp. $[X_n = 2]$) est la loi binomiale de paramètres $(2, 1/3)$ (resp. $(1, 5/9)$).

d) On note $E(X_{n+1}/X_n = i)$ l'espérance de la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = i]$. Déterminer les valeurs respectives de $E(X_{n+1}/X_n = 1)$ et $E(X_{n+1}/X_n = 2)$.

4°) On suppose, *uniquement dans cette question*, que X_0 suit la loi binomiale de paramètres $(3, 1/3)$.

a) Déterminer la loi de X_1 et calculer $E(X_1)$.

b) Vérifier la formule suivante : $E(X_1) = \sum_{i=0}^3 E(X_1/X_0 = i)P([X_0 = i])$.

5°) Pour tout entier naturel n , on considère le vecteur U_n de \mathbb{R}^4 défini par :

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P([X_n = 0]) \\ P([X_n = 1]) \\ P([X_n = 2]) \\ P([X_n = 3]) \end{pmatrix}$$

a) Déterminer une relation entre u_n, v_n, w_n et t_n .

b) A l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([X_n = i])_{0 \leq i \leq 3}$, déterminer une matrice M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ indépendante de n , telle que : $U_{n+1} = MU_n$.

c) Exprimer M en fonction de S . En déduire les valeurs propres de M .

d) Donner l'expression des réels u_n et v_n en fonction de n, v_0 et w_0 .

6°) On pose $F = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X_n = 0]$.

a) Que signifie l'événement F ?

b) Montrer que le virus finit par disparaître presque sûrement, quelle que soit la loi de la variable aléatoire initiale X_0 .

Partie II : le cas général

On suppose que pour tout entier naturel n et pour tout entier i de $\llbracket 0, N \rrbracket$, on a $P([X_n = i]) > 0$. On suppose également que pour tout couple (i, j) de $\llbracket 0, N \rrbracket^2$, le réel $q_{i,j}$ défini par $q_{i,j} = P_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j])$, est indépendant de n .

Soit Q la matrice de $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ définie par : $Q = (q_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N}$.

1°) a) Déterminer, pour tout j de $\llbracket 0, N \rrbracket$, les probabilités $q_{0,j}$ et $q_{N,j}$. De même déterminer pour tout i de $\llbracket 0, N \rrbracket$, la probabilité $q_{i,N}$.

b) Justifier que si l'on a $j > N - i$, alors $q_{i,j} = 0$.

c) Montrer que pour tout i de $\llbracket 1, N - 1 \rrbracket$, la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = i]$, est une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2°) a) Montrer que 1 est valeur propre de la matrice Q .

b) Soit λ une valeur propre de Q , et $V = \begin{pmatrix} V(0) \\ V(1) \\ \vdots \\ V(N) \end{pmatrix}$ un vecteur propre

associé à λ . On pose : $|V(i)| = \max_{0 \leq j \leq N} |V(j)|$. Justifier que la composante $V(i)$ n'est pas nulle, puis en examinant la ligne i du système $QV = \lambda V$, montrer que l'on a : $|\lambda| \leq 1$.

3°) On pose pour tout entier naturel n : $U_n = \begin{pmatrix} P([X_n = 0]) \\ P([X_n = 1]) \\ \vdots \\ P([X_n = N]) \end{pmatrix}$.

A l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer en fonction de Q une matrice M de $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ indépendante de n et vérifiant pour tout n de \mathbb{N} la relation $U_{n+1} = MU_n$.

On suppose jusqu'à la fin de la partie II que la matrice M est diagonalisable, que $\mathcal{B} = (V_0, \dots, V_N)$ est une base de vecteurs propres de M telle que, pour tout k de $\llbracket 0, N \rrbracket$, le vecteur propre V_k est associé à une valeur propre λ_k . De

plus, on suppose que $\lambda_0 = 1$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et que pour tout k de $\llbracket 1, N \rrbracket$, on a $|\lambda_k| < 1$.

4°) On décompose alors le vecteur U_0 sur la base \mathcal{B} : $U_0 = \sum_{k=0}^N \alpha_k V_k$.

a) Déterminer, pour tout n de \mathbb{N} , la décomposition du vecteur U_n sur la base \mathcal{B} .

b) On note, pour tout couple (k, i) de $\llbracket 0, N \rrbracket^2$, $V_k(i)$ la $(i+1)^{\text{ème}}$ composante du vecteur V_k . Exprimer, pour tout n de \mathbb{N} et pour tout i de $\llbracket 0, N \rrbracket$, la probabilité de l'événement $[X_n = i]$ en fonction des réels α_k , λ_k et $V_k(i)$ ($k \in \llbracket 0, N \rrbracket$).

c) Montrer que, pour tout i de $\llbracket 1, N \rrbracket$, on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} P([X_n = i]) = 0$.

d) En déduire que le virus finit par disparaître presque sûrement, quelle que soit la loi de la variable aléatoire initiale X_0 .

Partie III : estimations ponctuelles et par intervalle de confiance de p

On suppose que le paramètre p , qui exprime la probabilité qu'un individu contagieux transmette le virus à un individu sain, est inconnu, et on cherche à l'estimer. On rappelle que $q = 1 - p$. Pour m entier supérieur ou égal à 1, on considère un m -échantillon (Y_1, \dots, Y_m) de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p , définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On pose $\bar{Y}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i$.

Dans toute la suite de cette partie, on note ε un réel strictement positif quelconque.

1°) a) Montrer que \bar{Y}_m est un estimateur sans biais de p , déterminer son risque quadratique.

b) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que l'intervalle $[\bar{Y}_m - \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}, \bar{Y}_m + \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95.

2°) Soit θ un réel positif.

a) Etablir l'égalité suivante : $P([\bar{Y}_m - p \geq \varepsilon]) = P([e^{m\theta\bar{Y}_m} \geq e^{m\theta(p+\varepsilon)}])$.

b) Montrer que si T est une variable aléatoire discrète finie à valeurs positives d'espérance $E(T)$ et a un réel strictement positif, on a l'inégalité : $P([T \geq a]) \leq \frac{E(T)}{a}$.

c) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par : $g(x) = \ln(pe^x + q)$. Déduire des questions précédentes, l'inégalité suivante :

$$P([\bar{Y}_m - p \geq \varepsilon]) \leq e^{m(g(\theta) - \theta(p+\varepsilon))}.$$

d) Montrer que la fonction g est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^+ , et vérifie, pour tout x de \mathbb{R}^+ , l'inégalité $|g''(x)| \leq \frac{1}{4}$.

e) En déduire l'inégalité suivante : $g(\theta) \leq \theta p + \frac{\theta^2}{8}$.

f) Etudier les variations de la fonction h définie sur \mathbb{R}^+ par $h(x) = \frac{x^2}{8} - \varepsilon x$. En déduire l'inégalité : $P([\bar{Y}_m - p \geq \varepsilon]) \leq e^{-2m\varepsilon^2}$.

3°) On pose : $\bar{W}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (1 - Y_i)$.

Etablir l'inégalité : $P([\bar{W}_m - q \geq \varepsilon]) \leq e^{-2m\varepsilon^2}$.

4°) a) Déduire des questions 2°) f) et 3°) l'inégalité suivante :

$$P([\bar{Y}_m - q \geq \varepsilon]) \leq 2e^{-2m\varepsilon^2}.$$

b) Sachant que $\ln(0,025) \simeq -3,688$, calculer $2e^{-2m\varepsilon^2}$ pour $\varepsilon = \sqrt{\frac{1,844}{m}}$. En déduire un nouvel intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95. Comparer cet intervalle de confiance à celui obtenu à la question 1°) b). Conclure.

Solution

Exercice

Question 1. _____

f est une fonction polynôme par rapport aux variables a et b , définie sur \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R} . On sait alors que

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2$$

Question 2. _____

a) Un point (a, b) de \mathbb{R}^2 est un point critique de f si et seulement si (a, b) est solution du système (S) :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(S) &\iff \begin{cases} \sum_{k=1}^n 2(ax_k + b - y_k)x_k = 0 \\ \sum_{k=1}^n 2(ax_k + b - y_k) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a \sum_{k=1}^n x_k^2 + b \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n y_k x_k = 0 \\ a \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n b - \sum_{k=1}^n y_k = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a \sum_{k=1}^n x_k^2 + b \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ a \sum_{k=1}^n x_k + nb = \sum_{k=1}^n y_k \end{cases} \iff \begin{cases} a \sum_{k=1}^n x_k^2 + bn\bar{x} = \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ na\bar{x} + nb = n\bar{y} \end{cases} \\
&\iff \boxed{(S) \iff \begin{cases} a \sum_{k=1}^n x_k^2 + bn\bar{x} = \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ b = \bar{y} - a\bar{x} \end{cases}}
\end{aligned}$$

b) La seconde équation donnant b en fonction de a , il suffit de remplacer b par la valeur ainsi obtenue et :

$$(S) \iff \begin{cases} b = \bar{y} - a\bar{x} \\ a \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 - n\bar{x}^2 \right) = \sum_{k=1}^n x_k y_k - n\bar{x}\bar{y} \end{cases}$$

ou encore :

$$(S) \iff \begin{cases} b = \bar{y} - a\bar{x} \\ a \left(\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) - \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) - \bar{x}\bar{y} \end{cases}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\star \sigma_x^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 2\bar{x}x_k + \bar{x}^2) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\bar{x} \times \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n \bar{x}^2 \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 - n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) - \bar{x}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\star \text{Cov}(x, y) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k - \bar{y} \sum_{k=1}^n x_k - \bar{x} \sum_{k=1}^n y_k + \sum_{k=1}^n \bar{x}\bar{y} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k - \bar{y} \times n\bar{x} - \bar{x} \times n\bar{y} + n\bar{x}\bar{y} \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k - n\bar{x}\bar{y} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) - \bar{x}\bar{y}
\end{aligned}$$

Le système (S) se réécrit donc enfin :

$$(S) \iff \begin{cases} b = \bar{y} - a\bar{x} \\ \sigma_x^2 a = \text{Cov}(x, y) \end{cases}$$

Or $\sigma_x^2 \neq 0$ sinon, d'après la définition de σ_x^2 on aurait $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = \bar{x}$, tous les x_k seraient égaux, ce qui est contraire à l'hypothèse. On peut diviser par σ_x^2

l'égalité précédente et on a :

$$a = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x^2} = \hat{a}, \text{ puis } b = \hat{b} = \bar{y} - a\bar{x}$$

c) La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 , on peut donc lui appliquer le théorème de Schwarz : $\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a}(a, b)$.

Comme \mathbb{R}^2 est un ouvert, f ne peut admettre un extremum local qu'en un point critique, donc uniquement au point (\hat{a}, \hat{b}) .

Utilisons les notations de Monge. Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a, b) = r(a, b) = 2 \sum_{k=1}^n x_k^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(a, b) = s(a, b) = 2 \sum_{k=1}^n x_k = 2n\bar{x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a, b) = t(a, b) = 2 \sum_{k=1}^n 1 = 2n \end{cases}$$

(Remarquons que ces dérivées partielles secondes ne dépendent pas du point où elles sont calculées) et donc :

$$\begin{aligned} (s^2 - rt)(\hat{a}, \hat{b}) &= 4n^2 \bar{x}^2 - 4n \sum_{k=1}^n x_k^2 = -4n \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 - n\bar{x}^2 \right) \\ &= -4n^2 \sigma_x^2 \quad (\text{calcul fait en } \mathbf{b}) \end{aligned}$$

$\sigma_x^2 \neq 0 \implies -4n^2 \sigma_x^2 < 0$, et f présente un extremum local en (\hat{a}, \hat{b}) . De plus $t(\hat{a}, \hat{b}) = 2n > 0$ (*idem* pour r), donc :

$$f \text{ présente un minimum local en } (\hat{a}, \hat{b})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d)} \quad f(\hat{a}, \hat{b}) &= \sum_{k=1}^n (\hat{a}x_k + \bar{y} - \hat{a}\bar{x} - y_k)^2 = \sum_{k=1}^n ((x_k - \bar{x})\hat{a} - (y_k - \bar{y}))^2 \\ &= \hat{a}^2 \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 - 2\hat{a} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) + \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2 \\ &= \hat{a}^2 n\sigma_x^2 - 2\hat{a}n \text{Cov}(x, y) + n\sigma_y^2 \\ &= n \frac{(\text{Cov}(x, y))^2}{\sigma_x^2} - n \frac{2(\text{Cov}(x, y))^2}{\sigma_x^2} + n\sigma_y^2 \quad (\text{d'après } \mathbf{2}^\circ) \mathbf{b)} \\ &= n \left(\sigma_y^2 - \frac{(\text{Cov}(x, y))^2}{\sigma_x^2} \right) = n(\sigma_y^2 - \sigma_y^2 r^2(x, y)) \end{aligned}$$

$$f(\hat{a}, \hat{b}) = n\sigma_y^2(1 - r^2(x, y))$$

Question 3. _____

a) $f(a, b)$ est une somme de carrés, donc $f(a, b) \geq 0$. En particulier $f(\hat{a}, \hat{b}) \geq 0$, donc $n\sigma_y^2(1 - r^2(x, y)) \geq 0$.

Les y_k n'étant pas tous égaux, l'un d'entre eux au moins est différent de \bar{y} , donc $\sigma_y^2 \neq 0$ et $\sigma_y^2 > 0$.

L'inégalité précédente équivaut à $1 - r^2(x, y) \geq 0$, donc $r^2(x, y) \leq 1$, soit :

$$\boxed{|r(x, y)| \leq 1}$$

b) Si $|r(x, y)| = 1$, alors $f(\hat{a}, \hat{b}) = 0$, ce qui équivaut successivement à :

$$\sum_{k=1}^n (\hat{a}x_k + \hat{b} - y_k)^2 = 0, \text{ soit } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \hat{a}x_k + \hat{b} - y_k = 0, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, y_k = \hat{a}x_k + \hat{b}.$$

Les points (x_k, y_k) sont tous sur la droite d'équation $y = \hat{a}x + \hat{b}$

Problème

Commentaire concernant la remarque :

« si $(X_i = 0)$ est réalisé, alors $(X_{i+1} = 0)$ l'est aussi. »

Cette inclusion a été contestée en disant : on peut avoir simultanément « aucun individu contagieux le jour i » et « k individus contaminés et non contagieux ce même jour, ($k > 0$) », ce qui impliquerait la réalisation de $(X_{i+1} = k)$.

Ceci est faux, car cette situation ne peut avoir lieu.

Explication : si le jour $i + 1$, il y a k individus contagieux (donc nécessairement contaminés) avec $k > 0$, alors ces k individus ont été contaminés le jour i . Donc ce jour là, il doit y avoir au moins un individu contagieux, pour les contaminer, c'est-à-dire que $X_i \neq 0$ est réalisé.

On vient de montrer : $(X_{i+1} \neq 0)$ est réalisé $\implies (X_i \neq 0)$ l'est aussi soit $(X_{i+1} \neq 0) \subset (X_i \neq 0)$, ce qui revient, par passage au complémentaire, à :

$$(X_i = 0) \subset (X_{i+1} = 0).$$

En fait il y a un problème concernant la définition de « $n^{\text{ème}}$ jour » : il faut comprendre qu'au tout début de la journée numéro n il y a un nombre X_n (aléatoire) de personnes contagieuses, et que **toutes les autres** personnes sont saines au début de cette journée (les gens contaminés la veille sont les gens contagieux du jour et les gens qui ne sont pas des contaminés de la veille sont soit restés sains soit redevenus sains au début de cette journée). Au petit matin il n'y a donc que deux catégories de personnes et la connaissance de X_n détermine la situation matinale, la valeur de X_{n+1} est donc le nombre aléatoire de personnes contaminées au cours de la $n^{\text{ème}}$ journée (ces individus n'ont aucune action ce jour) et qui seront les contagieux du lendemain.

Partie I

Question 1. _____

Réolvons le système $(S) : R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

Avec des manipulations évidentes, on a successivement :