Ecriture des résultats
Unités SI

1. Donner en notation scientifique avec 2 chiffres significatifs et en unités SI :

a) l'aire d'un rectangle de côtés 32 cm sur 4,5 dm
b) le volume d'une sphère de rayon 4,5 cm
c) la vitesse d'un avion volant à 1 200 km/h
d) la masse d'eau que peut contenir une cuve cylindrique de diamètre d = 60 cm et de hauteur h = 80 cm.

2. Le méridien terrestre mesure C = 40 000 km très précisément et la superficie de la France est de 550 000 km^2. Calculer :

a) la surface de la Terre en unités SI
b) le nombre de France que peut contenir la Terre.

Correction

1. a) L'aire A est en m^2. $A = 0{,}32 \times 0{,}45 = 1{,}4 \times 10^{-1}\ m^2$.

b) Le volume V d'une sphère de rayon R est $V = \frac{4\pi}{3} R^3$.

Dans le système SI, V est en m^3 si R est en m. On a alors

$$V = \frac{4\pi(4{,}5.10^{-2})^3}{3}\ ;\ V = 3{,}8.10^{-4}\ m^3.$$

c) La vitesse V est en m/s dans le système SI.

$$V = \frac{1200\ km}{1\ h} = \frac{1200.10^3\ m}{3600\ s}\ ;\quad V = 3{,}3.10^2\ m/s.$$

d) Le volume V de la cuve est :

V = surface $\times$ hauteur

$V = \frac{\pi d^2.h}{4}$. Dans le système SI, d, h sont en m et V en m^3.

$V = \frac{\pi.0{,}6^2.0{,}8}{4}$; $V = 2{,}3.10^{-1}\ m^3$.

Un litre d'eau (= 1 dm^3) a pour masse 1 kg ; le kg est l'unité de masse dans le système SI. La masse d'eau (m) que contient la cuve est donc :

$m = 10^3.2{,}3.10^{-1}$ kg $\qquad m = 2{,}3.10^2$ kg.

2. a) La surface S de la Terre est celle d'une sphère de rayon R, $S = 4\pi R^2$ où $R = \frac{C}{2\pi}$, le méridien étant le périmètre C d'un cercle de rayon R.

Donc $S = \frac{4\pi C^2}{4\pi^2} = \frac{C^2}{\pi}$. En unités SI, S est en m^2, C en m.

$$S = \frac{(4.10^4.10^3)^2}{\pi}\ ;\ S = 5{,}09.10^{14}\ m^2.$$

b) On a : $n = \frac{\text{surface de la Terre}}{\text{surface de la France}}$, les surfaces étant dans la même unité, par exemple le m^2 (1 km^2 = 10^6 m^2). On a donc : $n = \frac{5{,}09.10^{14}}{5{,}5.10^5.10^6}$;

$n = 10^3$.

On pourrait répartir à peu près 1 000 fois la France sur la surface de la Terre.

2 Précision des données et erreurs

Une cuve cylindrique a pour dimensions extérieures :
diamètre d = 60 cm ; hauteur h = 80 cm ; l'épaisseur de ses parois est e = 1 cm.

Calculer :

1. Son volume extérieur, V_1, en L.
2. Son volume intérieur, V_2, en L.
3. L'erreur $x = V_1 - V_2$ qu'on commet en confondant le volume intérieur et le volume extérieur.
4. L'erreur relative $y = \dfrac{V_1 - V_2}{V}$, qu'on commet en confondant volumes intérieur et extérieur, en prenant pour V au choix V_1, V_2, ou V moyen.
5. Si on ne spécifie pas si les dimensions de la cuve sont intérieures ou extérieures, avec quelle précision suffit-il de donner le volume de cette cuve ?

Correction

▸ **1.** V_1 a été calculé précédemment, V_1 est en L (= dm^3) si d et h sont en dm.

On a : $V_1 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2.8 = 226$ L $= 2{,}3.10^2$ L.

▸ **2.** Les dimensions intérieures sont alors

d' = 60 – 2 = 58 cm = 5,8 dm

h' = 80 – 1 = 79 cm = 7,9 dm

et on a $V_2 = \pi\left(\frac{5{,}8}{2}\right)^2.7{,}9 = 209$ L.

▸ **3.** On a $x = V_1 - V_2 = 226{,}\ldots - 209{,}\ldots = 17{,}5$ L

▸ **4.** On a

$$y = \frac{V_1 - V_2}{V_1} = \frac{17{,}\ldots}{226{,}\ldots} = 0{,}08 = 8\ \%$$

$$y = \frac{V_1 - V_2}{V_2} = \frac{17{,}\ldots}{209{,}\ldots} = 0{,}08 = 8\ \%$$

L'erreur relative est de 8 %.

▸ **5.** Avec 3 chiffres significatifs, on travaillerait à 1 % près ; il suffit de donner 2 chiffres significatifs.

$$V = 2{,}2.10^2 \text{ L.}$$

Précision des mesures et expression des résultats

On trace un triangle ABC rectangle en A en traçant d'abord le côté AB, puis l'angle droit $\widehat{BAC} = A$, puis l'angle $\widehat{ABC} = B$.
On mesure AB = 50 mm ; A = 90° ; B = 52°.

1. Si le côté et les angles étaient mesurés parfaitement, quelles seraient les longueurs des côtés AC et BC ?

2. Si le côté AB est mesuré au demi mm près (on a $49{,}5 \leq AB \leq 50{,}5$ mm), et les angles parfaitement, entre quelles valeurs sont compris AC et BC ?

3. Calculer les écarts relatifs

$$x_1 = \frac{AC_{max} - AC_{min}}{AC_{min\ ou\ max}} \ ; \ x_2 = \frac{BC_{max} - BC_{min}}{BC_{min\ ou\ max}} .$$

4. S'il y a en outre une incertitude sur la mesure de l'angle B telle que $51° \leq B \leq 53°$, donner le nouvel encadrement des côtés AC et BC.

5. Calculer les nouveaux écarts relatifs (y_1 ; y_2) pour AC et BC.
Ecrire alors les valeurs de AC et BC sous la forme
$AC = ...mm \pm ...mm$
$BC = ...mm \pm ...mm$

Correction

▸ **1.** On a

$\frac{AC}{AB} = \tan B$; $AC = AB \tan B$; $AC = 50 \tan 52°$; $AC = 64{,}0$ mm

$\frac{AB}{BC} = \cos B$; $BC = \frac{AB}{\cos B}$; $BC = \frac{50}{\cos 52°}$; $BC = 81{,}2$ mm

▸ **2.** On a

$49{,}5 \tan 52° \leq AC \leq 50{,}5 \tan 52°$; $63{,}4 \leq AC \leq 64{,}6$ mm

$\frac{49{,}5}{\cos 52°} \leq BC \leq \frac{50{,}5}{\cos 52°}$; $80{,}4 \leq BC \leq 82{,}0$ mm

▸ **3.** On a

$x_1 = \frac{64{,}6.... - 63{,}3...}{64{,}..} = 0{,}02 = 2\ \%$; $x_2 = \frac{82{,}... - 80{,}...}{80{,}...} = 0{,}02 = 2\ \%$

▸ **4.** Les plus petites valeurs de AC et de BC correspondent aux plus petites valeurs de AB et de B. On a donc

$49{,}5 \tan 51° \leq AC \leq 50{,}5 \tan 53°$; $\frac{49{,}5}{\cos 51} \leq BC \leq \frac{50{,}5}{\cos 53}$

$61 \leq AC \leq 67$ mm ; $79 \leq BC \leq 84$ mm

▸ **5.** On a

$y_1 = \frac{67{,}... - 61{,}...}{61 \text{ ou } 67} = 0{,}10 = 10\ \%$; $y_2 = \frac{83{,}... - 78{,}...}{78 \text{ ou } 83} = 0{,}07 = 7\ \%$

On a $AC = 64 \pm 3$ mm ; $BC = 81 \pm 3$ mm.

4 Une formule de trigonométrie

On considère un triangle quelconque ABC.

On pose $\widehat{BAC} = A$; $\widehat{ABC} = B$; $\widehat{ACB} = C$ et AB = c ; AC = b ; BC = a.

On appelle AH et BI deux hauteurs de ce triangle.

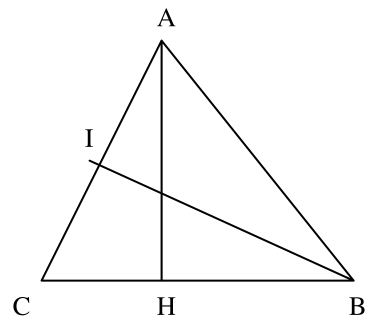
On se propose de démontrer la formule suivante, valable quel que soit le triangle ABC :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

1. Faire une figure.
2. Exprimer sin C de deux façons différentes en s'aidant des triangles rectangles ABI et CBI.
3. En déduire la relation entre A, C, a, c.
4. Faire de même avec A, B, a, b.
5. En déduire la formule proposée.

Correction

▸ **1.** On a



▸ **2.** Dans le triangle ABI, on a $\sin A = \frac{BI}{AB}$. Dans le triangle CBI, on a de même $\sin C = \frac{BI}{BC}$.

▸ **3.** On a donc

$BI = AB\sin A = BC\sin C$; $c\sin A = a\sin C$ et $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

▸ **4.** Dans le triangle ABH on écrit $\sin B = \frac{AH}{AB}$; dans le triangle ACH on écrit $\sin C = \frac{AH}{AC}$. Donc $AH = AB\sin B = AC\sin C$ et $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

▸ **5.** On a par transitivité,

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

On reverra avec profit - les formules donnant les surfaces et volumes usuels - les lignes trigonométriques - les correspondances entre unités de volume.