Chapitre 1. Cours

Objectifs pédagogiques

- Maîtriser l'atout torseur qui permet la modélisation de la mécanique du solide
- Connaître les différentes propriétés du torseur
- Savoir déterminer l'axe central d'un torseur analytiquement et géométriquement

Notions abordées

- Champ de vecteurs (uniforme, centrale, antisymétrique, équiprojectif)
- Théorème de Delassus
- Torseur (définition, éléments de réduction, etc.)
- Loi de transport des moments
- Opérations sur les torseurs (somme, produit ou comoment, etc.)
- Invariants d'un torseur (Invariant scalaire ou automoment - Invariant vectoriel)
- Axe central (équation vectorielle, équations paramétriques)
- Glisseur
- Couple
- Décomposition canonique
- Décomposition centrale
- Interprétation géométrique – Origine du mot torseur
- Torseur associé à un ensemble de vecteurs liés
- Torseur associé à une densité de vecteurs

La notion de torseur est à la mécanique du solide, ce que le vecteur est à la mécanique du point. En effet, en mécanique du point, le vecteur est un atout mathématique approprié pour décrire le mouvement d'un point matériel ; on parle alors de vecteur vitesse, vecteur accélération etc. En mécanique du solide l'outil mathématique privilégié est le **torseur**. Il sert en particulier à représenter le mouvement d'un solide (torseur cinématique), à modéliser une action mécanique (torseur d'action), à formuler dans sa généralité le principe fondamental de la dynamique (torseur dynamique) ainsi qu'à exprimer la puissance des efforts extérieurs subis par un solide.
Mais c'est quoi au juste un torseur ? C'est à cette question qu'on va essayer d'apporter des réponses dans ce chapitre.

1. Champ de vecteurs

1.1. Définition

Un champ de vecteurs $\vec{H}(P)$ est une application de l'espace affine E_a dans l'espace vectoriel euclidien E_v :

$$\begin{aligned} \vec{H} &: E_a \rightarrow E_v \\ P &\mapsto \vec{H}(P) \end{aligned}$$

1.2. Champ uniforme

Un champ de vecteurs $\vec{H}(P)$ est dit uniforme sur un domaine *(D)* si sa valeur est indépendante du point $P \in (D)$:

$$\vec{H}(P) = \vec{H}(Q) \ \forall P, Q \in (D)$$

1.3. Champ central

Un champ de vecteurs $\vec{H}(P)$ est dit central si il existe un point O tel que, $\forall P$ on a :

$$\vec{H}(P) = \lambda \overrightarrow{OP}$$

où λ est un scalaire.

1.4. Champ antisymétrique (ou champ de moments)

Un champ de vecteurs $\vec{H}$ est antisymétrique, si il existe un vecteur $\vec{R}$, tel que, $\forall\ P, Q$, on a :

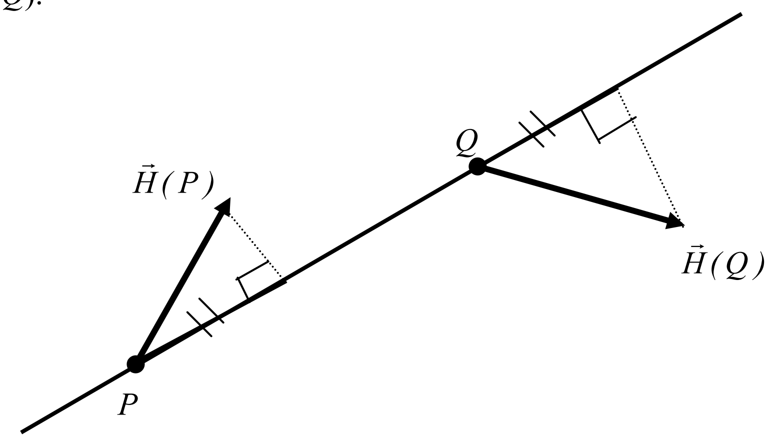
$$\vec{H}(P) = \vec{H}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$$

1.5. Champ équiprojectif

Un champ de vecteurs $\vec{H}$ est équiprojectif si $\forall\ P, Q$ on a :

$$\vec{H}(P).\overrightarrow{PQ} = \vec{H}(Q).\overrightarrow{PQ}$$

cela traduit l'égalité des projections orthogonales des vecteurs $\vec{H}(P)$ et $\vec{H}(Q)$ sur la droite (*PQ*).



1.6. Théorème de Delassus

Tout champ de vecteurs équiprojectif est antisymétrique et réciproquement.

Démonstration

On a :

$$\vec{H}(Q) = \vec{H}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}$$

car le champ est antisymétrique

en multipliant par le vecteur $\overrightarrow{PQ}$, il vient :

$$\overrightarrow{PQ}.\vec{H}(Q) = \overrightarrow{PQ}.\vec{H}(P) + \underbrace{\overrightarrow{PQ}.(\vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ})}_{0}$$

or $\quad \overrightarrow{PQ}.(\vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}) = \vec{R} \wedge (\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PQ}) = \vec{0}$

ce qui donne

$$\overrightarrow{PQ}.\vec{H}(Q) = \overrightarrow{PQ}.\vec{H}(P) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

1.7. Applications pédagogiques

Application pédagogique 1

Soit l'espace vectoriel E_v muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et l'espace affine E_a muni du repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le champ de vecteurs $\vec{H}$ de E_a dans E_v, qui à tout point P de coordonnées *(x, y, z)* associe le vecteur $\vec{H}(P) = \begin{cases} y + az \\ -x + z \\ by - x \end{cases}$ où *a* et *b* sont des paramètres réels.

Déterminer *a* et *b* pour que le champ $\vec{H}$ soit antisymétrique.

Solution

On a : $\vec{H}(O)=\begin{cases}0\\0\\0\end{cases}$

Le champ $\vec{H}$ est antisymétrique, s'il existe un vecteur $\vec{R}=\begin{cases}\alpha\\\beta\\\gamma\end{cases}$ tel que :

$$\vec{H}(P)=\vec{H}(O)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}\Leftrightarrow\begin{cases}y+az\\-x+z=\\by-x\end{cases}\begin{cases}\beta z-\gamma y\\\gamma x-az\\\alpha y-\beta x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=1\\\gamma=-1\end{cases}\ et\ \begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$$

Application pédagogique 2

Dans le repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on donne les trois points *A (1, 1, 1), B (1, 0, 0)* et *C (0, 1, 2)* et les trois moments associés respectivement à chaque point :

$$\begin{cases}\overline{H}(A)=-\vec{x}+a\vec{y}+3\vec{z}\\\overline{H}(B)=-\vec{x}+\vec{y}+b\vec{z}\\\overline{H}(C)=\vec{x}-\vec{y}+c\vec{z}\end{cases}$$

1. Déterminer *a, b* et *c* pour que $\vec{H}$ soit un champ équiprojectif.
2. Déterminer La résultante $\vec{R}$ du torseur [*T*] admettant $\vec{H}$ comme champ de moments.

Solution

1. Le champ $\vec{H}$ est équiprojectif si et seulement si : $\begin{cases}\vec{H}(A).\overrightarrow{AB}=\vec{H}(B).\overrightarrow{AB}\\\vec{H}(A).\overrightarrow{AC}=\vec{H}(C).\overrightarrow{AC}\\\vec{H}(B).\overrightarrow{BC}=\vec{H}(C).\overrightarrow{BC}\end{cases}$

Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB}=(0,-1,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$ et $\overrightarrow{BC}=(-1,1,2)$

$$\vec{H}(A).\overrightarrow{AB}=\vec{H}(B).\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1\\a\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\b\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow-a-3=-1-b\Leftrightarrow b-a=2$$

$$\vec{H}(A).\overrightarrow{AC}=\vec{H}(C).\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1\\a\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\c\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow1+3=-1-c\Leftrightarrow c=5$$

$$\vec{H}(B).\overrightarrow{BC} = \vec{H}(C).\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 1+1+2b = -1-1+10 \Leftrightarrow b = 3$$

et d'après la première équation $a = 1$.

2. Si $\vec{H}$ est un champ de vecteurs équiprojectif, alors il est également le champ de moments d'un torseur qui admet pour résultante $\vec{R}$.

Soit (x, y, z) les coordonnées de $\vec{R}$.

$\vec{H}$ et $\vec{R}$ doivent vérifier la relation de transport des moments d'un torseur :

$$\vec{H}(A) = \vec{H}(B) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

nous avons également :

$$\vec{H}(B) = \vec{H}(C) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

d'où :

$$\vec{R}(0,2,2)$$

2. Torseurs

2.1. Définition

On appelle torseur et on note $[T] = [\vec{R}, \vec{H}(P)]$ tout champ de vecteurs $\vec{H}(P)$ pour lequel il existe un vecteur $\vec{R}$ tel que $\forall (P, Q)$ on a :

$$\vec{H}(P) = \vec{H}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$$

Loi de transport des moments

$\vec{R}$ est appelée la résultante du torseur.

$\vec{H}(P)$ est appelé le moment du torseur en P.

La résultante $\vec{R}$ est un vecteur libre indépendant du point P.
Par contre le champ de vecteurs $\vec{H}(P)$ (vecteur lié appelé aussi champ de moments) dépend du point P.

Remarque
L'ensemble des torseurs est un espace vectoriel sur le corps des nombres réels.

2.2. Eléments de réduction - Notation

L'ensemble formé par $\vec{R}$ et $\vec{H}(P)$ constitue les éléments de réduction du torseur en P.

Notation vectorielle

$$[T] = {}_P\begin{cases} \vec{R} \\ \vec{H}(P) \end{cases}$$

Notation analytique

Soit $B = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ une base orthonormée directe, $\vec{R} = {}_B\begin{cases} X \\ Y \\ Z \end{cases}$ et $\vec{H}(P) = {}_B\begin{cases} L \\ M \\ N \end{cases}$

$$[T] = {}_P\left\{\begin{array}{|cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Les coordonnées *(X, Y, Z, L, M, N)* sont appelées coordonnées scalaires en P du torseur $[T]$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ou **coordonnées pluckériennes** du torseur.

2.3. Application pédagogique

Soit l'espace vectoriel E_v muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et l'espace affine E_a muni du repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le champ de vecteurs $\vec{H}$ de E_a dans E_v, qui à tout point P de coordonnées *(x, y, z)* associe le vecteur $\vec{H}(P) = \begin{cases} 1 + ty - z \\ -tx - tz \\ 1 + x + t^2 y \end{cases}$ où t est un paramètre réel.

Pour quelles valeurs de t le champ $\vec{H}$ est un torseur ? Préciser la résultante du torseur pour chaque cas.

Solution

Le champ $\vec{H}$ constitue un torseur s'il existe un vecteur $\vec{R} = \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases}$ tel que :

$$\vec{H}(P) = \vec{H}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + ty - z \\ -tx - tz \\ 1 + x + t^2 y \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 1 \end{cases} + \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases} \wedge \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = t \\ \beta = -1 \\ \gamma = -t \\ t = t^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \;\; et \;\; \vec{R}_0 = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \; ou \;\; t = 1 \;\; et \;\; \vec{R}_1 = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ -1 \end{cases}$$

3. Opérations sur les torseurs

Les opérations sur les torseurs ne peuvent être effectuées que sur des torseurs exprimés au même point et dans le même repère.

Soient les deux torseurs suivants:

$$[T_1] = {}_P\begin{cases} \vec{R}_1 \\ \vec{H}_1(P) \end{cases} \quad \text{et} \quad [T_2] = {}_P\begin{cases} \vec{R}_2 \\ \vec{H}_2(P) \end{cases}$$

on a alors les propriétés suivantes :

3.1. Egalité

Deux torseurs sont égaux s'ils ont mêmes éléments de réductions en un point, réciproquement s'ils ont mêmes éléments de réduction en un point, ils sont égaux.

$$\text{Deux torseurs } [T_1] \text{ et } [T_2] \text{ sont égaux} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \vec{H}_1(P) = \vec{H}_2(P) \end{cases}$$

3.2. Somme

La somme de deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ est le torseur $[T]$ défini par :

$$[T] = [T_1] + [T_2] = {}_P\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{H}(P) = \vec{H}_1(P) + \vec{H}_2(P) \end{cases}$$

la somme de deux torseurs est associative et commutative.
Il existe en outre un **élément neutre**, appelé **torseur nul**, tel que la somme de ce torseur à un second torseur laisse ce dernier inchangé. Il existe aussi un élément symétrique, appelé torseur opposé, tel que la somme d'un torseur et de son opposé est l'élément neutre.

3.3. Produit ou comoment

Le comoment de deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ est le scalaire défini par :

$$[T_1].[T_2] = \begin{pmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{H}_1(P) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{H}_2(P) \end{pmatrix} = \vec{R}_1.\vec{H}_2(P) + \vec{R}_2.\vec{H}_1(P)$$

Proposition

Le comoment de deux torseurs est indépendant du point P, on dit que c'est un invariant.

Démonstration
En un point B, on a :
$\vec{R}_1.\vec{H}_2(B)+\vec{R}_2.\vec{H}_1(B)=\vec{R}_1.(\vec{H}_2(A)+\vec{R}_2\wedge\overrightarrow{AB})+\vec{R}_2.(\vec{H}_1(A)+\vec{R}_1\wedge\overrightarrow{AB})$
soit :
$\vec{R}_1.\vec{H}_2(B)+\vec{R}_2.\vec{H}_1(B)=\vec{R}_1.\vec{H}_2(A)+\vec{R}_2.\vec{H}_1(A)+\vec{R}_1.(\vec{R}_2\wedge\overrightarrow{AB})+\vec{R}_2.(\vec{R}_1\wedge\overrightarrow{AB})$
et enfin : $\vec{R}_1.\vec{H}_2(B)+\vec{R}_2.\vec{H}_1(B)=\vec{R}_1.\vec{H}_2(A)+\vec{R}_2.\vec{H}_1(A)$
car $\vec{R}_1.(\vec{R}_2\wedge\overrightarrow{AB})+\vec{R}_2.(\vec{R}_1\wedge\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}.(\vec{R}_1\wedge\vec{R}_2)-\overrightarrow{AB}.(\vec{R}_1\wedge\vec{R}_2)=\vec{0}$

Exemple
Le comoment de deux torseurs sert à exprimer le double de l'énergie cinétique d'un solide. Dans ce cas, l'un des torseurs sera le torseur cinématique et le deuxième torseur sera le torseur cinétique.

3.4. Multiplication par un scalaire

La multiplication d'un torseur $[T_1]$ par un scalaire λ est le torseur $[T]$ défini par :

$$[T]=\lambda[T_1]=\begin{cases}\vec{R}=\lambda\vec{R}_1\\ \vec{H}(P)=\lambda\vec{H}_1(P)\end{cases}_P$$

la multiplication par un scalaire est associative et distributive.

3.5. Application pédagogique

On considère dans le repère orthonormé $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ les deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ définis par :

$$[T_1]=\begin{cases}\vec{R}_1=-3\vec{x}+\vec{y}\\ \vec{M}_1(A)=-3\vec{x}+3\vec{z}\end{cases}_A \quad \text{avec } A\ (3,\ 0,\ 0)$$

$$[T_2]=\begin{cases}\vec{R}_2=3\vec{x}-\vec{y}+3\vec{z}\\ \vec{M}_2(B)=-\vec{y}+3\vec{z}\end{cases}_B \quad \text{avec } B\ (0,\ 4,\ 0)$$

1. Déterminer les éléments de réduction en O du torseur somme $[T]=[T_1]+[T_2]$.
2. Calculer le comoment de ces deux torseurs $[C]=[T_1]\otimes[T_2]$.

Solution
1. Pour faire la somme de deux torseurs, il faut qu'ils soient tous les deux exprimés au même point. Déterminons le moment en O du torseur $[T_1]$.

$$\vec{M}_1(O)=\vec{M}_1(A)+\vec{R}_1\wedge\overrightarrow{AO}=\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\6\end{pmatrix}$$