Chapitre 1

Généralités sur les fonctions numériques réelles

1.1 Le concept de fonction numérique réelle

Le lecteur a certainement l'habitude de définir une fonction par une formule telle que « *pour x appartenant à un certain ensemble D,* $f(x) = \dots$ ». Il est important dans une telle formule de bien identifier l'ensemble de départ, d'arrivée et l'expression d'une fonction. Nous commencerons pour cela par définir plus rigoureusement ce qu'on appelle une fonction*.

Définition 1.1

> Une fonction f d'un ensemble A dans un ensemble B est la donnée pour chaque élément de A d'un **unique** élément y de B appelé *image* de x. On note alors $y = f(x)$. L'ensemble A est appelé l'*ensemble de départ* et l'ensemble B est appelé l'*ensemble d'arrivée*. Pour désigner une fonction de A dans B, on utilise la formule « Soit $f : A \to B$ ». Le terme « fonction numérique réelle » désigne alors toute fonction d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Un cas particulier mais important de fonctions est celui où les images des éléments de l'ensemble de départ sont obtenues à l'aide d'une formule simple, c'est-à-dire le cas des fonctions f dont les images $f(x)$ sont obtenues en calculant une expression en x. Pour une telle fonction, il suffit donc de connaître l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et cette expression pour la définir. Pour désigner de telles fonctions, on utilise généralement une des formules suivantes : « Soit $f : A \to B, x \mapsto f(x)$ », « Soit f de A dans B qui à x associe $f(x)$ », « Soit $f : x \in A \longmapsto f(x)$ » ou « Soit f définie sur A qui à x associe $f(x)$ ». Il est très important pour de telles fonctions de ne pas confondre

- le nom de la fonction,
- l'expression définissant la fonction,
- la valeur de la fonction en un point de l'ensemble de départ.

*On utilise aussi parfois le terme *application* pour désigner une fonction.

Exemple 1.2 – Lorsqu'on écrit « soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x^4 + 1$ », on définit ainsi une fonction dont

- l'ensemble de départ est $[0,1]$,
- l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$,
- le nom de la fonction est f
- et l'expression définissant la fonction est $x^4 + 1$.

Il arrive souvent qu'on ne donne qu'une expression numérique $f(x)$ pour définir une fonction f sans préciser l'ensemble de départ de la fonction. La convention est alors de prendre pour ensemble de départ de la fonction ce qu'on appelle le *domaine de définition* de f.

Définition 1.3

> On appelle *ensemble de définition* ou *domaine de définition* d'une fonction f le plus grand sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ sur lequel on peut calculer la valeur de $f(x_0)$ en tout point x_0 de D. Dans la suite, nous noterons D_f le domaine de définition d'une fonction f. Ainsi, les formules « Soit f la fonction donnée par l'expression $f(x)$ » et « Soit $f : D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ » sont synonymes.

Exemple 1.4 – Soit f la fonction numérique réelle donnée par l'expression

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}. \tag{1.1}$$

Déterminer le domaine de définition de f consiste alors à chercher le plus grand sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ pour lequel on peut calculer la valeur de f en tout point de D. La valeur de f est calculable en tout point x_0 tel que $x_0^2 - 4 \neq 0$ (le quotient de deux nombres réels n'est défini que si le dénominateur est différent de 0). En d'autres termes, la valeur de f en x_0 est calculable si et seulement si x_0 n'est pas une racine du trinôme du second degré $x^2 - 4$. Les racines du trinôme du second degré $x^2 - 4$ étant -2 et 2, le domaine de définition de f, noté D_f, est donc l'ensemble des réels différents de -2 et 2, ce qui s'écrit

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \quad \text{(qui se lit } \mathbb{R} \text{ privé de } -2 \text{ et } 2\text{)}.$$

Une manière plus formelle d'énoncer le raisonnement ci-dessus est la suivante :

$$x \in D_f \iff x^2 - 4 \neq 0 \iff \quad x^2 \neq 4 \iff x \notin \{-2, 2\}.$$

Généralement, on écrit le domaine de définition sous la forme d'un intervalle ou de la réunion d'intervalles disjoints :

$$D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[.$$

Une autre notion importante est la notion d'*antécédent*.

Définition 1.5

> Soit une fonction $f : A \to B$. Soit $y \in B$. On dit alors qu'un point x de A est un antécédent par f de y si $f(x) = y$. Les antécédents par f de $y = 0$ sont aussi appelés les *zéros* de f.

Exemple 1.6 – Soit f la fonction numérique réelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}, \quad f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}. \tag{1.2}$$

Les antécédents de $y = -\dfrac{5}{7}$ par f sont les solutions de l'équation (dont l'inconnue est x) :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4} = -\frac{5}{7}.$$

La résolution de cette équation donne

$$\frac{x^2-1}{x^2-4} = -\frac{5}{7} \iff 7(x^2-1) = -5(x^2-4) \iff 12x^2 = 27 \iff x^2 = \frac{9}{4} \iff x = \pm\frac{3}{2}.$$

Les antécédents par f de $y = -\dfrac{5}{7}$ sont les points $x_1 = -\dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3}{2}$.

✎ À SAVOIR

Le nom de la variable d'une fonction est muet. On utilise généralement le symbole x pour désigner la variable d'une fonction mais on peut utiliser n'importe quel symbole pour la désigner. Ainsi, les écritures $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2+1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y^2+1$ définissent la **même** fonction.

Définition 1.7

On appelle *courbe représentative* ou *graphe* d'une fonction numérique réelle $f : D \to \mathbb{R}$ l'ensemble des points $\mathscr{C}_f$ du plan de coordonnées $(x, f(x))$ lorsque x parcourt D. Traditionnellement, on représente la courbe représentative d'une fonction numérique réelle dans le repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (Figure 1.1 page suivante).

1.2 Composition des fonctions

Définition 1.8

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions. On appelle *composée* des fonctions f et g, notée $g \circ f$, la fonction de A dans C qui à x associe $g(f(x))$.

Exemple 1.9 – Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\star, x \mapsto x^2+1$ et $g : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{x}$. La fonction composée $g \circ f$ et la fonction

$$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2+1},$$

alors que la fonction composée $f \circ g$ est

$$f \circ g : \mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R}^\star, x \longmapsto f(g(x)) = \big(g(x)\big)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1.$$

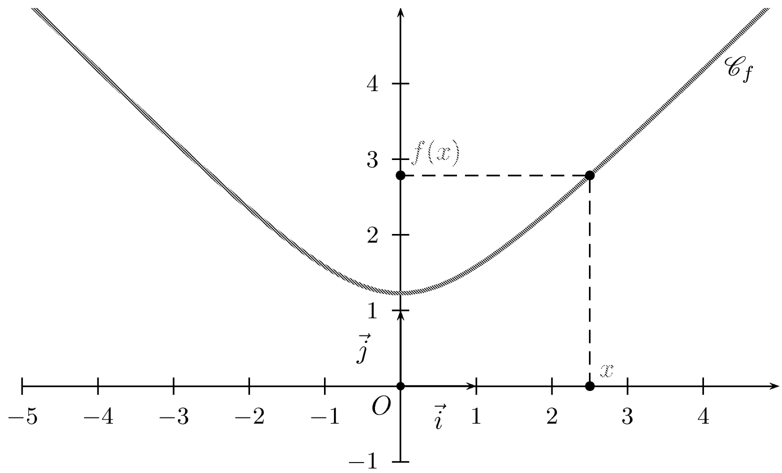


Fig. 1.1 – Courbe représentative d'une fonction numérique réelle

Attention – Lorsqu'on omet de préciser l'ensemble d'arrivée dans la définition de deux fonctions, il faut faire attention avant de les composer. Plus précisément, étant données deux fonctions $f : x \in A \mapsto f(x)$ et $g : x \in B \mapsto g(x)$, avant de définir la fonction composée $g \circ f$, il faut s'assurer que :

$$\forall x \in A, \quad f(x) \in B$$

c'est-à-dire que les images des points de A par f appartiennent à l'ensemble de départ de g.

Exemple 1.10 – Soient $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2 - 1$ et $g : x \in \mathbb{R}^\star \mapsto \frac{1}{x}$. On ne peut pas définir la composée $g \circ f$ car $f(1) = f(-1) = 0 \notin \mathbb{R}^\star$. En revanche, on peut définir la composée $f \circ g : x \in \mathbb{R}^\star \mapsto \frac{1}{x^2} - 1$.

1.3 Sens de variation

Définition 1.11

Soit une fonction $f : A \to B$. On dit que

1. f est croissante sur A lorsque $\forall (x, y) \in A^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
2. f est décroissante sur A lorsque $\forall (x, y) \in A^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
3. f est strictement croissante sur A lorsque $\forall (x, y) \in A^2$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
4. f est strictement décroissante sur A lorsque $\forall (x, y) \in A^2$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
5. f est monotone sur A lorsqu'elle est soit croissante soit décroissante sur A.
6. f est strictement monotone sur A lorsqu'elle est soit strictement croissante soit strictement décroissante sur A.

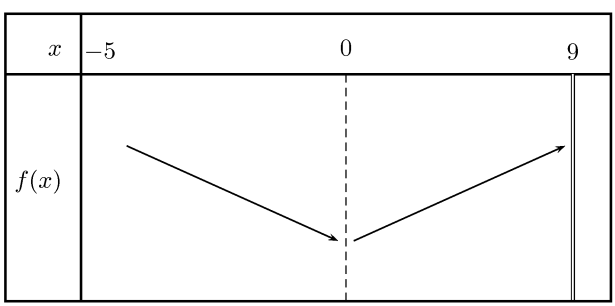
Exemple 1.12 – Soit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + x$. Pour étudier la monotonie de f, on fixe deux points x et y de $\mathbb{R}$ tels que $x < y$ et on cherche le signe de $f(y) - f(x)$. Pour cela, remarquons que :

$$f(y) - f(x) = y^3 + y - (x^3 + x) = y^3 - x^3 + y - x = (y - x)(y^2 + xy + x^2 + 1).$$
$$= (y - x)\left(\frac{3}{4}y^2 + \left(\frac{y}{2} + x\right)^2 + 1\right) \geq 0.$$

On a donc montré que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, c'est-à-dire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque – Il arrive qu'une fonction ne soit pas monotone sur son domaine de définition comme la fonction $f(x) = x^2$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ alors qu'elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^\star$.

On indique généralement le sens de variation (au sens strict) d'une fonction dans un tableau appelé *tableau de variation*. Par exemple, le tableau de variation 1.1 indique que la fonction f est strictement croissante sur $[-5, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, 9[$ (la double barre indique que la fonction f n'est pas définie en 9).



Tab. 1.1 – Tableau de variation

Remarque – La détermination du sens de variation d'une fonction f peut se révéler être un problème difficile. Nous verrons dans la suite comment ramener ce problème à l'étude de signe d'une fonction particulière, à savoir la fonction *dérivée* de f.

1.4 Symétries du graphe

On rappelle qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit *symétrique par rapport à* 0 si, et seulement si, il vérifie

$$\forall x \in A, \quad -x \in A.$$

Exemple 1.13 – Les sous-ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^\star$, $[-1,1]$ et $]-\infty,-3]\cup[3,+\infty[$ sont symétriques par rapport à 0 alors que les sous-ensembles $\mathbb{R}^+$, $[-2,4]$, $[0,1]$ ne le sont pas.

Définition 1.14

Soit $f : A \to B$ une fonction. Supposons que l'ensemble A soit symétrique par rapport à 0. Alors, on dit que

1. f est *paire* lorsque $\forall x \in A,\ f(-x) = f(x)$.
2. f est *impaire* lorsque $\forall x \in A,\ f(-x) = -f(x)$.

Remarque –

1. Les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto x^{2n+1}$ sont impaires.
2. Les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, sont paires.

Exemple 1.15 – Soient les fonctions $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^4 - 2x^2$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + x$.

La fonction f est paire car

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^4 - 2\,(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x),$$

tandis que la fonction g est impaire puisque

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -\left(x^3 + x\right) = -f(x).$$

Contre-exemple 1.16 – La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + 1$ n'est ni paire ni impaire puisque $f(-1)$ vaut 0 et n'est ni égal à $f(1) = 2$ ni à $-f(1) = -2$.

1.5 Logarithme, exponentielle, fonctions puissances

La fonction exponentielle, notée exp (figure 1.2 page suivante), et le logarithme naturel, notée ln (figure 1.3 page 12), sont parmi les fonctions les plus importantes en mathématiques et dans ses domaines d'application. Notamment, elles permettent d'étendre la notion de puissance à des exposants réels quelconques, c'est-à-dire par exemple de donner un sens à l'écriture 3^π. Nous ne les définirons pas rigoureusement et nous nous contenterons d'en rappeler leurs principales propriétés en commençant bien entendu par leurs domaines de définition respectifs :

$$D_{\exp} = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D_{\ln.} = \mathbb{R}^{+\star}.$$

Mais surtout, les fonctions exponentielle et logarithme sont liées par la relation ci-dessous (1.3) et possèdent chacune une propriété, qu'il est très important de connaître, rappelée dans le théorème 1.17.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+\star},\ \exp(\ln(x)) = x. \tag{1.3}$$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\exp(x)$	$\nearrow$

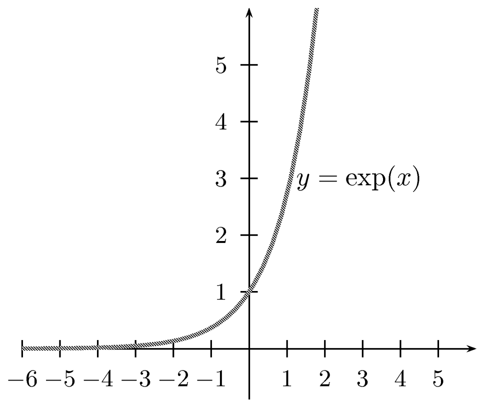


FIG. 1.2 – Sens de variation et courbe représentative de la fonction exp

Théorème 1.17

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.
2. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+\star})$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Exemple 1.18 – Soit $f(x) = \ln(x) + x$ et $g(x) = \exp(x)$. Les domaines de définition de f et g sont $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^\star$ et $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$. Il est possible de définir la composée $f \circ g$ puisque $\forall x \in \mathscr{D}_g = \mathbb{R}$, $g(x) \in \mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^\star$. L'expression de $f \circ g$ en $x \in \mathbb{R}$ est alors

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \ln(\exp(x)) + \exp(x) = x + \exp(x).$$

Grâce à ces deux fonctions, il est possible d'étendre la notion de puissance a^e à des exposants e réels, et non nécessairement entiers à condition de restreindre les valeurs possibles de a.

Définition 1.19

Soit a un nombre réel strictement positif et α un nombre réel. Alors, on note a^α la valeur de $\exp(\alpha \ln(a))$.

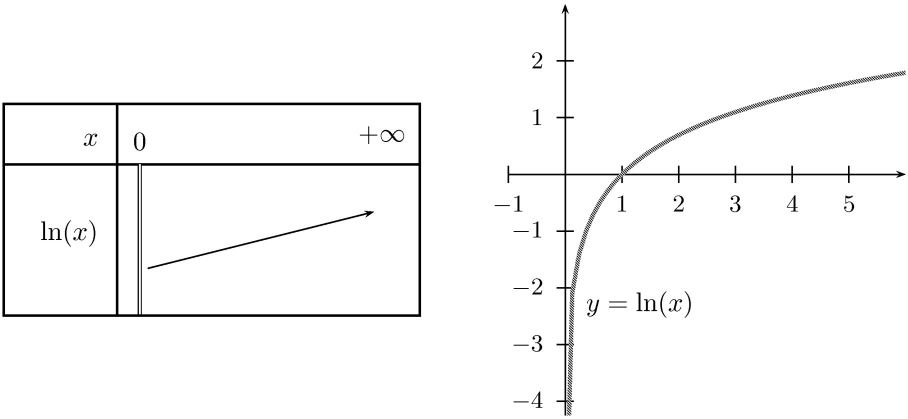
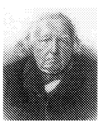


FIG. 1.3 – Sens de variation et courbe représentative de la fonction ln



Un point à signaler est qu'il est possible de ne pas se restreindre à $\mathbb{R}^{+\star}$ pour définir certaines puissances. En effet, pour un entier n, a^{-n} désigne l'inverse de a et peut donc être défini pour tout $a \neq 0$. De même, on note aussi $a^{\frac{1}{n}}$ la racine n^{e} d'un nombre réel a qui existe pour tout a si n est impair et seulement pour $a \geq 0$ si n est pair. Néanmoins, nous avons choisi de ne pas donner de résultats trop généraux sur la question du domaine de définition des fonctions puissances. Le lecteur trouvera dans le tableau 1.2 page suivante quelques exemples de fonctions puissances avec leurs domaines de définition respectifs.

✎ À SAVOIR

Il existe un unique nombre réel e, appelé *nombre d'Euler*, tel que $\ln(e) = 1$. Pour tout nombre réel x, on a donc $e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x)$. Pour cette raison, nous utiliserons indifféremment $\exp(x)$ ou e^x comme définition de la fonction exponentielle. La valeur du nombre d'Euler est approximativement :

$$e \simeq 2,718281828.$$

La puissance ainsi définie possède les propriétés suivantes.

Théorème 1.20

Pour tout couple $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2$ et tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

1. $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.
2. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
3. $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$.
4. $(xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$.