

Chapitre I

La houle régulière

La houle est une onde de gravité dont la période peut varier de 3 s à 25 s. Considérons le schéma de définition représenté Figure I.1 pour une houle régulière de hauteur crête-creux H , de période T , se propageant dans une hauteur d'eau moyenne au repos d . La période correspond à l'intervalle de temps entre le passage de deux crêtes successives de vague, ou de deux creux successifs, en un point donné. La longueur d'onde, distance horizontale entre deux points correspondants sur deux crêtes de vague successives ou deux creux de vague successifs, peut varier de quelques dizaines à quelques centaines de mètres. Le cas d'une houle irrégulière, correspondant à la houle réelle rencontrée en mer, sera considéré dans le chapitre 3.

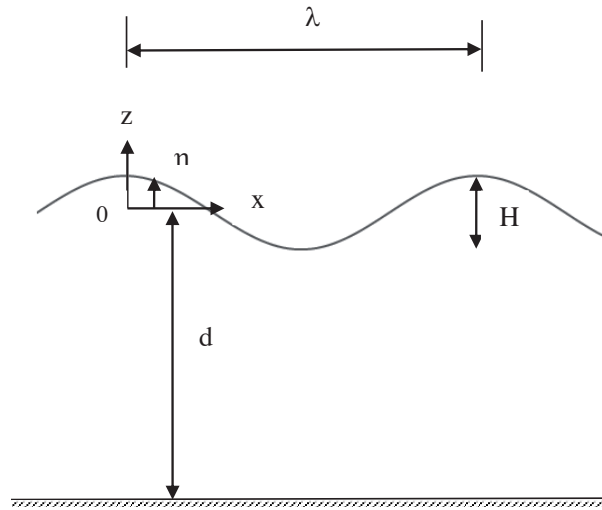


Figure I.1 : Schéma de définition.

Différentes théories de houle ont été développées pour la houle régulière. La théorie la plus simple est la théorie de faible amplitude, théorie du premier ordre également appelée théorie d'Airy, ou théorie linéaire. Dans le cadre de cette théorie, la hauteur de la crête de vague au-dessus du niveau de l'eau au repos est égale à la distance (verticale) entre ce niveau d'eau au repos et le creux de vague : $H/2$. Des théories d'ordre supérieur, non linéaires, sont nécessaires pour considérer le cas de houles plus fortes (d'amplitude finie) ou de houle se propageant en eau peu profonde. Les ondes sont considérées se propager en eau profonde lorsque la profondeur d'eau d est supérieure ou égale à la moitié

de la longueur d'onde λ , en eau peu profonde lorsque d est inférieur à $\lambda/25$, en profondeur intermédiaire dans les autres cas.

Les limites de validité des théories de houle fréquemment utilisées sont représentées Figure I.2 où g représente l'accélération de la gravité. Commençons par considérer la théorie la plus simple, la théorie linéaire.

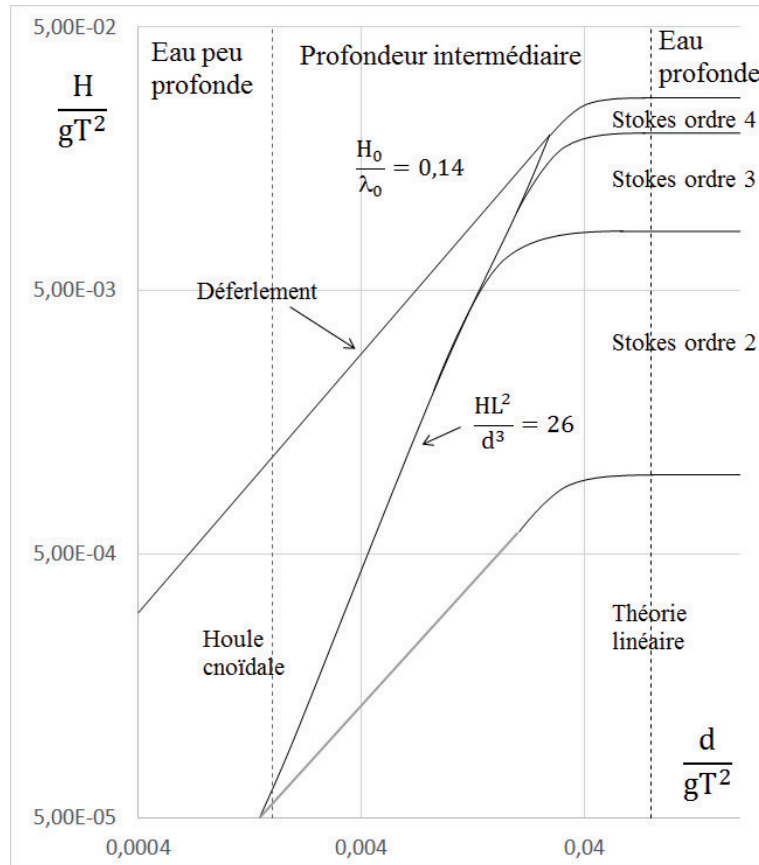


Figure I.2 : Domaines de validité de diverses théories de houle.

1 THÉORIE DE LA HOULE LINÉAIRE

1.1 Cinématique

Cette théorie a été développée par Airy (1845). Les hypothèses sont les suivantes :

- Ecoulement bidimensionnel
- Ecoulement incompressible

Soit $\vec{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ le vecteur vitesse d'une particule fluide exprimé dans le repère cartésien $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. L'équation de continuité nous donne dans ce cas :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

- Fluide non visqueux
- Ecoulement irrotationnel

$$\text{On a donc : } \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

- Faible hauteur de houle par rapport à la longueur d'onde et la profondeur d'eau

Cela se traduit par les relations suivantes :

$$\frac{H}{\lambda} \ll 1 \quad (3)$$

$$\frac{H\lambda^2}{d^3} \ll 1 \quad (4)$$

- Effets de Coriolis dus à la rotation de la terre négligés
- Fond horizontal fixe imperméable

Les conditions aux limites permettent de déterminer les solutions ; ces conditions sont les suivantes :

$$\text{* au fond (z=0) : } w = 0 \quad (5)$$

Cette relation traduit l'imperméabilité du fond.

* à la surface libre η (cf. Figure I.1):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w - u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (6)$$

$$p = \text{cste} ; \quad (7)$$

cette dernière relation signifie que la tension superficielle est négligée, étant donné que ses conséquences ne se font sentir que pour des ondes très courtes, et que les effets en transport sédimentaire sont négligeables.

Soit ϕ le potentiel des vitesses (écoulement irrotationnel):

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (8)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (9)$$

Soit ψ la fonction de courant (écoulement bidimensionnel incompressible). Les lignes équipotentielles (valeurs constantes du potentiel des vitesses) sont orthogonales aux lignes d'iso-valeurs de la fonction de courant. On a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (11)$$

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant satisfont l'équation de Laplace :

$$\Delta\phi = 0 \quad (12)$$

$$\Delta\Psi = 0 \quad (13)$$

La célérité c de l'onde de gravité, ou vitesse de phase, peut s'exprimer de la façon suivante :

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{g}{k} \tanh(kd)\right)^{1/2} \quad (14)$$

$k=2\pi/\lambda$ étant le nombre d'onde de la houle, $\omega=2\pi/T$ la pulsation, et g l'accélération de la gravité. L'équation (14) appelée équation de dispersion montre que la vitesse de propagation de l'onde dépend de sa période, les ondes longues se propageant à des vitesses plus grandes que les ondes courtes. En eau profonde, $\tanh(kd)$ tend vers 1, et l'équation (14) se simplifie:

$$c = \frac{\lambda}{T} = c_0 = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} \quad (15)$$

En eau peu profonde, l'équation (14) se simplifie :

$$c = \sqrt{gd} \quad (16)$$

La célérité de l'onde ne dépend ainsi que de la hauteur d'eau ; on peut parler dans ce cas d'ondes longues.

Lorsqu'une houle se propage du large vers une plage, sa vitesse et sa longueur dépendent tout d'abord que de sa période, puis de sa période et de la profondeur, et finalement que de la profondeur. Le milieu fluide correspond ainsi en premier lieu à un milieu dispersif, et aux abords du rivage à un milieu non dispersif.

L'évolution spatio-temporelle de la surface libre peut être décrite pour une houle sinusoïdale se propageant suivant l'axe des x (direction des x positifs) par l'équation suivante :

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) \quad (17)$$

Pour une houle sinusoïdale se déplaçant dans le sens opposé, on a :

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx + \omega t) \quad (18)$$

Le potentiel des vitesses est le suivant :

$$\phi = \frac{HL}{2T} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(kx - \omega t) \quad (19)$$

Les composantes horizontales et verticales de la vitesse des particules fluides sont données par les relations suivantes :

$$u = \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(kx - \omega t) \quad (20)$$

$$w = \frac{\pi H}{T} \frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(kx - \omega t) \quad (21)$$

Les relations (20) et (21) montrent une décroissance de l'amplitude des composantes de vitesse avec la distance sous la surface libre. Les vitesses maximales horizontales et verticales sont déphasées de $\pi/2$. Les particules fluides ont une vitesse horizontale et dirigée dans le sens de propagation de la houle lors du passage du sommet de vague, alors qu'elles ont une vitesse horizontale et dirigée en sens opposé lors du passage du creux de vague. Au passage du front montant de vague, les vitesses des particules fluides sont verticales et orientées vers le haut ; de façon analogue, les vitesses sont orientées vers le bas au passage du front descendant de vague. A un instant donné, on peut ainsi schématiser les vecteurs vitesse des particules fluides sur une longueur d'onde de la houle comme indiqué sur la figure I.3.

La composante horizontale de la vitesse au niveau du fond s'écrit :

$$u(z = -d) = U_{\infty} \cos(kx - \omega t) \quad (22)$$

$$\text{avec } U_{\infty} = \frac{\pi H}{T \sinh(kd)} \quad (23)$$

L'amplitude de déplacement des particules fluides au fond a est donnée par :

$$a = \frac{U_{\infty}}{\omega} \quad (24)$$

Les composantes horizontales et verticales de l'accélération des particules fluides sont obtenues par dérivation partielle par rapport au temps des équations (20) et (21) :

$$\Gamma_x = \frac{2\pi^2 H \cosh[k(z+d)]}{T^2 \sinh(kd)} \sin(kx - \omega t) \quad (25)$$

$$\Gamma_z = -\frac{2\pi^2 H \sinh[k(z+d)]}{T^2 \sinh(kd)} \cos(kx - \omega t) \quad (26)$$

Il n'y a pas de transport de masse selon la théorie linéaire. Le déplacement des particules fluides s'obtient facilement par intégration des équations (20) et (21) :

$$x_d = -\frac{H \cosh[k(z+d)]}{2 \sinh(kd)} \sin(kx - \omega t) \quad (27)$$

$$z_d = \frac{H \sinh[k(z+d)]}{2 \sinh(kd)} \cos(kx - \omega t) \quad (28)$$

où x_d et z_d représentent respectivement les déplacements horizontaux et verticaux des particules fluides par rapport à leur position moyenne. Les déplacements sont schématisés sur la figure I.4. Les particules décrivent des ellipses en eau peu profonde ($d < \lambda/25$) ou en profondeur intermédiaire ($\lambda/25 < d < (\lambda/2)$), alors qu'elles décrivent des cercles en eau profonde ($d > \lambda/2$). Sachant que :

$$\cos^2(kx - \omega t) + \sin^2(kx - \omega t) = 1 \quad (29)$$

le mouvement elliptique est obtenu en combinant les équations (27) et (28):

$$\frac{x_d^2}{A^2} + \frac{z_d^2}{B^2} = 1 \quad (30)$$

$$\text{avec: } A = \frac{H \cosh[k(z+d)]}{2 \sinh(kd)} \quad (31)$$

$$B = \frac{H \sinh[k(z+d)]}{2 \sinh(kd)} \quad (32)$$

A et B correspondent à l'amplitude, respectivement horizontale et verticale, des déplacements des particules fluides. Pour des conditions d'eau profonde, on a $A = B$ et les trajectoires sont circulaires ; nous avons alors :

$$A = B = \frac{H}{2} \exp(kz) \quad (33)$$

En eau peu profonde, les équations (31) et (32) deviennent :

$$A = \frac{H}{2} \frac{1}{kd} \quad (34)$$

$$B = \frac{H}{2} \left(1 + \frac{z}{d}\right) \quad (35)$$

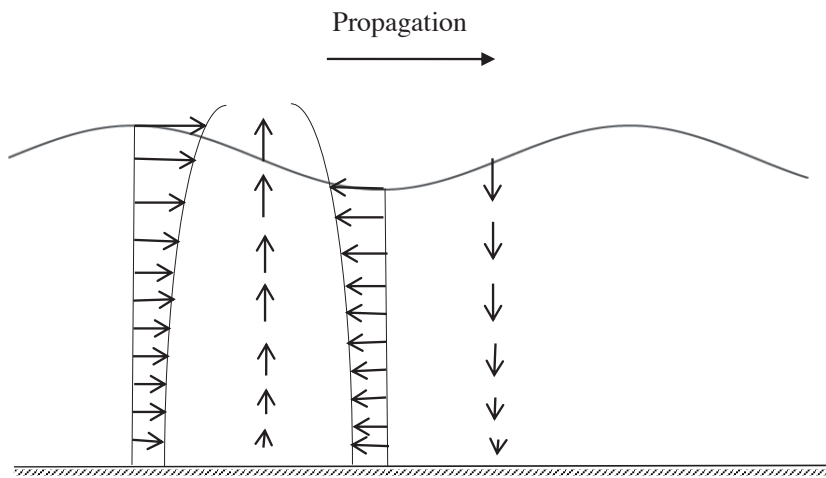


Figure I.3 : Schématisation des vecteurs vitesses des particules fluides sur une longueur d'onde, à un instant donné.

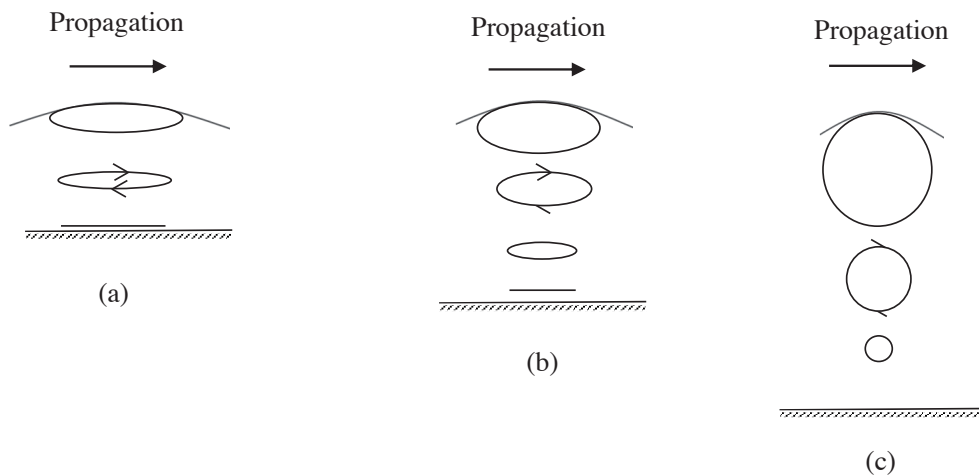


Figure I.4 : Schéma des déplacements des particules fluides selon la théorie linéaire ; (a) : eau peu profonde ; (b) : profondeur intermédiaire ; (c) : eau profonde.

1.2 Distribution de pression

La distribution de pression totale (ou absolue) p_t s'exprime de la façon suivante :

$$p_t = \frac{\rho g H \cosh[k(z+d)]}{2 \cosh(kd)} \cos(kx - \omega t) - \rho g z + p_a \quad (36)$$

où ρ est la masse volumique de l'eau et p_a la pression atmosphérique. Le premier terme du membre de droite de l'équation (36) correspond à la composante dynamique liée à l'accélération, alors que le second est la composante statique. Pour des raisons pratiques, la pression atmosphérique est généralement soustraite de la pression totale, et la pression s'écrit :

$$p = \frac{\rho g H \cosh[k(z+d)]}{2 \cosh(kd)} \cos(kx - \omega t) - \rho g z \quad (37)$$

1.3 Vitesse de groupe et vitesse de phase

Considérons la combinaison de deux ondes sinusoidales η_1 et η_2 ayant des longueurs d'onde proches λ_1 et λ_2 , des périodes faiblement différentes T_1 et T_2 , de même hauteur crête-creux H , et se propageant dans la même direction. L'évolution temporelle de la surface libre s'écrit :

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \frac{H}{2} \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \frac{H}{2} \cos(k_2 x - \omega_2 t) \quad (38)$$

où $k_1 = 2\pi/\lambda_1$, $k_2 = 2\pi/\lambda_2$, $\omega_1 = 2\pi/T_1$, $\omega_2 = 2\pi/T_2$. Le profil correspondant de la surface libre est représenté sur la figure I.5.

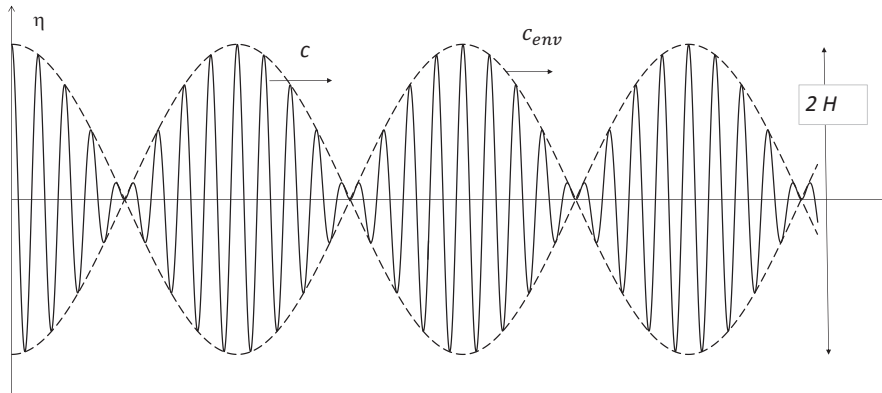


Figure I.5 : Profil de la surface libre pour la combinaison de deux ondes sinusoidales de période différente et de même amplitude.

L'équation (38) peut être facilement mise sous la forme :

$$\eta = H \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \quad (39)$$

Les ondes apparaissent se déplacer en groupe dont le mouvement de l'enveloppe est décrit par le premier facteur cosinus dans l'équation (39). Sachant que $c = \omega/k$ (Equation 14), la vitesse de propagation de l'enveloppe c_{env} est donnée par la relation suivante :

$$c_{env} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \quad (40)$$

Lorsque $\omega_2 \rightarrow \omega_1$ et $k_2 \rightarrow k_1$, on obtient :

$$c_{env} \rightarrow \frac{d\omega}{dk} = c_g \quad (41)$$

où c_g est la vitesse de groupe. Cette vitesse peut s'écrire sous la forme :

$$c_g = \frac{1}{2} c \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right) \quad (42)$$

En eau profonde, cette relation se simplifie et on a :

$$c_g = \frac{1}{2} c_0 = \frac{gT}{4\pi} \quad (43)$$

Dans le cas de l'eau peu profonde, l'équation (42) se réduit à :

$$c_g = c = \sqrt{gd} \quad (44)$$

Les vitesses de groupe et de phase sont donc égales dans ce dernier cas, et ne dépendent que de la hauteur d'eau ; toutes les ondes composant le train d'onde vont donc se propager à la même vitesse. En eau profonde et en profondeur intermédiaire, la célérité de l'onde dépend de la longueur d'onde ; ainsi, les ondes longues vont se propager plus vite que des ondes plus courtes, induisant des différences de phase et des groupes d'onde. Dans ce cas (eau profonde et profondeur intermédiaire), les ondes sont dites dispersives.

La vitesse de groupe est particulièrement importante car elle correspond à la vitesse de propagation de l'énergie de l'onde.

1.4 Energie et puissance des ondes

L'énergie totale d'une onde est la somme de son énergie cinétique (associée au mouvement) et de son énergie potentielle (par rapport au niveau de repos ; liée à la gravité). L'énergie cinétique pour une longueur d'onde et par unité de largeur de crête E_{cin} , peut être obtenue à partir de la relation suivante :

$$E_{cin} = \int_x^{x+\lambda} \int_{-d}^{\eta} \rho \frac{u^2 + w^2}{2} dz dx \quad (45)$$

Après intégration, on obtient dans le cadre de la théorie de la houle linéaire :

$$E_{cin} = \frac{1}{16} \rho g H^2 \lambda \quad (46)$$

L'énergie potentielle pour une longueur d'onde et par unité de largeur de crête E_{pot} pour une houle linéaire est donnée par l'équation suivante :

$$E_{pot} = \int_x^{x+\lambda} \rho g \left[\frac{(\eta+d)^2}{2} - \frac{d^2}{2} \right] dx = \frac{1}{16} \rho g H^2 \lambda \quad (47)$$