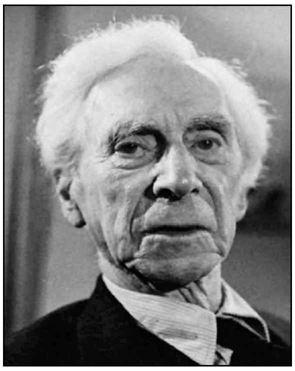
Chapitre 1

Vocabulaire de la logique et des ensembles

Le mathématicien italien Giuseppe **Peano** était très soucieux d'exposer les mathématiques dans un cadre précis et rigoureux. Dans son *Formulaire mathématique* publié en 1895, il introduisit de nombreux symboles nouveaux. On lui doit en particulier $\cap$ et $\cup$ désignant respectivement l'intersection et la réunion. Il utilise la lettre grecque *epsilon*, abréviation du grec *esti, il est*, pour noter l'appartenance et introduit le quantificateur existentiel qu'il note $\exists$, renversant un E pour signifier l'initiale du mot italien *esiste*. Il propose aussi de supprimer les déclinaisons du latin pour obtenir une langue internationale, simple et comprise par tous, qu'il nomme *Latino sine flexione*. Le logicien anglais Bertrand **Russell** propose un paradoxe qui remet en cause la théorie des ensembles et nécessite de la fonder sur un système d'axiomes.



Bertrand Russell
1872-1970

■■ Objectifs

■ Les incontournables

▷ Notions de logique élémentaire :
– utiliser les connecteurs logiques et les quantificateurs pour exprimer des énoncés mathématiques ;
– maitriser les principales techniques de démonstration.

▷ Vocabulaire de la théorie des ensembles :
– sous-ensemble, inclusion ;
– intersection, réunion, complémentaire ;
– n-uplet, produit cartésien.

Résumé de cours

Logique élémentaire

Définition : *Une* assertion *ou* proposition *est un énoncé qui peut prendre la valeur vrai ou faux.*

Remarque : Une proposition ne contient pas de variable, par exemple, $\{x < 0\}$ n'est pas une proposition, tant qu'on ne connait pas la valeur de x.

Un énoncé qui dépend d'une ou plusieurs variables est une *forme propositionnelle* ou un *prédicat.*

Définition : *Une tautologie est une proposition qui est toujours vraie.*

Connecteurs logiques

Les connecteurs logiques permettent de combiner des propositions pour en construire de nouvelles ; on en considère cinq :

Définition : *Soient P et Q deux propositions*

La négation de P se note non$P$, $\sim P$, ou $\neg P$ ou encore $\overline{P}$;
$P \vee Q$ se lit : P et Q ; *$P \wedge Q$ se lit : P ou Q ;*
$P \Rightarrow Q$ se lit : P implique Q ; *$P \iff Q$ se lit : P équivaut à Q.*

Tables de vérité

On regroupe dans un tableau, appelé *table de vérité* les valeurs de vérité des propositions ci-dessus :

P	**Q**	$\mathbf{P \wedge Q}$	$\mathbf{P \vee Q}$	$\mathbf{P \Rightarrow Q}$	$\mathbf{P \Leftrightarrow Q}$
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*
F	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*
F	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*

et

P	$\mathbf{\neg P}$
V	*F*
F	*V*

Propriétés :

- $\neg(\neg P) = P$ (la double négation est une affirmation) ;
- $P \Rightarrow Q$ est équivalent à $(\neg P) \vee Q$;
- $P \iff Q$ est équivalent à $\big(P \Rightarrow Q\big) \wedge \big(P \Rightarrow Q\big)$

Proposition 1.1.— Associativité du « et », du « ou » —. Soient P, Q, R trois propositions :
- $\big(P \wedge Q\big) \wedge R \iff P \wedge \big(Q \wedge R\big)$
- $\big(P \vee Q\big) \vee R \iff P \vee \big(Q \vee R\big)$

Remarque : On peut supprimer les parenthèses si l'on a que des $\wedge$ ou que des $\vee$:
$\big(P \wedge Q\big) \wedge R \Longleftrightarrow P \wedge \big(Q \wedge R\big) \Longleftrightarrow P \wedge Q \wedge R$ et $\big(P \vee Q\big) \vee R \Longleftrightarrow P \vee \big(Q \vee R\big) \Longleftrightarrow P \vee Q \vee R$.

Proposition 1.2.— Distributivité du « ET » par rapport à « OU », distributivité du « OU » par rapport à « ET » —. Soient P, Q, R trois propositions :
- $P \vee \big(Q \wedge R\big) \iff \big(P \vee Q\big) \wedge \big(P \vee R\big)$
- $P \wedge \big(Q \vee R\big) \iff \big(P \wedge Q\big) \vee \big(P \wedge R\big)$

On ne peut pas supprimer les parenthèses lorsqu'on a à la fois des ET et des OU dans une même expression.

Proposition 1.3.— Négation d'un ≪ et ≫, négation d'un ≪ ou ≫ —.
Soient P et Q deux propositions :

- $\neg\big(P \wedge Q\big) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$
- $\neg\big(P \vee Q\big) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$

Ces propriétés se généralisent à un nombre quelconque de propositions ; soit $n \geqslant 2$ et $P_1, \dots, P_n$ des propositions :

- $\neg\left(\bigwedge_{k=1}^{n} P_k\right) \iff \bigvee_{k=1}^{n} (\neg P_k)$
- $\neg\left(\bigvee_{k=1}^{n} P_k\right) \iff \bigwedge_{k=1}^{n} (\neg P_k)$

Définition : Contraposée —. *Soient P et Q deux propositions :*
La contraposée de l'implication $\big(P \Longrightarrow Q\big)$ est l'implication $\big(\neg Q \Longrightarrow \neg P\big)$.

Proposition 1.4.— Une implication et sa contraposée sont équivalentes.
Si P et Q sont deux propositions, $\big(P \Longrightarrow Q\big)$ est équivalent à $\big(\neg Q \Longrightarrow \neg P\big)$.

Exemple : Considérons la proposition : *Il pleut* $\Longrightarrow$ *Il y a des nuages*, c'est une tautologie. Sa contraposée est : *Il n'y a pas de nuages* $\Longrightarrow$ *Il ne pleut pas*, qui est également toujours vraie.

Définition : Réciproque —. *Soient P et Q deux propositions :*
La réciproque de $\big(P \Longrightarrow Q\big)$ est $\big(Q \Longrightarrow P\big)$.

Remarque : $\big(P \Longrightarrow Q\big) \wedge \big(Q \Longrightarrow P\big)$ est équivalente à $\big(P \Longleftrightarrow Q\big)$.

■ Théorie des ensembles

Définition : *Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F, ou que E est une partie de F, si tout élément de E est un élément de F. On le note $E \subset F$. Si $E \subset F$, alors $\forall x \in E,\ x \in F$.*

Remarque : Si E et F sont deux parties d'un même ensemble de référence Ω, on a $E \subset F \iff (\forall x \in \Omega,\ x \in E \Longrightarrow x \in F)$.

Définition : *Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont égaux s'ils ont les mêmes éléments. On le note $E = F$.*

Remarque : Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Notation : *Pour tout ensemble E, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties (ou des sous-ensembles) de E.*

Définition : Opérations sur les parties d'un ensemble —. *Si A et B sont deux parties d'un ensemble E, alors :*

- ***la réunion de** A **et** B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des objets qui sont éléments de A ou de B. $A \cup B = \{x \in E / \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$;*

- ***l'intersection de** A **et** B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des objets qui sont à la fois éléments de A et de B. $A \cap B = \{x \in E/\ x \in A \text{ et } x \in B\}$;*
- ***le complémentaire de** A **dans** E, noté $\complement_E A$ est l'ensemble des élements de E qui n'appartiennent pas à A. $\complement_E A = \{x \in E/\ x \notin A\}$;*
- ***la différence de** A **et** B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B. $A \setminus B = \{x \in E/\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$.*

Remarques :

- Le complémentaire de A dépend de l'ensemble E dans lequel A est inclus ; lorqu'il n'y a pas ambigüité, on le note aussi $\overline{A}$.
- Si $B \subset A$, alors $A \setminus B = \complement_A B$.

Proposition 1.5.— Distributivité —. Pour toutes parties A, B, C d'un ensemble E, on a :
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de l'intersection par rapport à la réunion) ;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de l'union par rapport à l'intersection).

Proposition 1.6.— Lois de Morgan —. Pour toutes parties A, B d'un ensemble E, on a :
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ces propriétés se généralisent aisément à un nombre quelconque de sous-ensembles :

Proposition 1.7.— Pour toutes parties $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ d'un ensemble E, on a :
- $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$
- $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i)$
- $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$
- $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

Définition : Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble. Une partition $\{E_1, E_2, \dots, E_p\}$ $p \geq 1$, de E vérifie les trois conditions suivantes :

(i) Tous les E_i pour i variant de 1 à p sont des parties non vides de E.
(ii) Les E_i sont 2 à 2 disjoints, c'est-à-dire : $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $E_i \cap E_j = \varnothing$.
(iii) La réunion de tous les E_i est égale à E : $\bigcup_{i=1}^{p} E_i = E$.

Définition : Produit cartésien

- *Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x,y), où $x \in E$ et $y \in F$:*

$$\boxed{E \times F = \{(x,y)/\ x \in E \text{ et } y \in F\}.}$$

- *On généralise à k ensembles $E_1, \dots, E_k$ par récurrence :*

$$\boxed{E_1 \times \cdots \times E_k = (E_1 \times \cdots \times E_{k-1}) \times E_k}$$

Remarque : Dans un couple, l'ordre est important, les couples (x, y) et (y, x) ne sont pas égaux ; par conséquent les ensembles $E \times F$ et $F \times E$ sont différents.

Notation : *Si $E_1, \ldots, E_k$ sont tous égaux à E, le produit cartésien $E \times E \times \cdots \times E$ se note alors E^k.*

Définition : *Un élément $(x_1, \ldots, x_k)$ de E^k s'appelle un k-uplet ou une k-liste d'éléments de E.*

■ Quantificateurs

Définition : Quantificateur universel
On le note $\forall$; il se lit « Quel que soit » ou « Pour tout ».
Soient E un ensemble et $P(x)$ un prédicat,
$\forall\, x \in E,\ P(x)$ s'énonce « pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vrai ».

Définition : Quantificateur existentiel
On le note $\exists$; il se lit « Il existe ».
Soient E un ensemble et $P(x)$ un prédicat,
$\exists\, x \in E,\ P(x)$ s'énonce « il existe au moins un élément x de E tel que $P(x)$ est vraie ».

Proposition 1.8.—
La négation de $\forall\, x \in E,\ P(x)$ est : $\exists\, x \in E,\ \overline{P}(x)$.
La négation de $\exists\, x \in E,\ P(x)$ est : $\forall\, x \in E,\ \overline{P}(x)$.

Remarque : Attention, l'ordre des quantificateurs est important ; par exemple si E est un ensemble, P une proposition qui dépend de deux variables x et y, alors « $\forall x \in E, \exists y \in E\ /\ P(x, y)$ » et « $\exists x \in E, \forall y \in E\ /\ P(x, y)$ » ne sont pas équivalentes.

Méthodes

Techniques de démonstration

❑ Méthode 1.1.— Construire des tables de vérité
On se donne une expression mathématique E qui fait intervenir des propositions $P_1, \dots, P_n$ pouvant toutes prendre la valeur VRAI ou FAUX indépendamment les unes des autres, et on cherche à déterminer la valeur de vérité de E en fonction des valeurs de $P_1, \dots, P_n$. Pour construire la table de vérité de E, on doit considérer 2^n cas (donc 2^n lignes pour la table de vérité) et on utilise les tables de vérité du cours (négation, et, ou, implication, équivalence).

Exemple : Montrer, à l'aide de tables de vérité, la **proposition 1.3** :
On va prouver $\neg\big(P \wedge Q\big) = (\neg P) \vee (\neg Q)$ et $\neg\big(P \vee Q\big) = (\neg P) \wedge (\neg Q)$, la généralisation se faisant par récurrence.

On a deux propositions, donc 4 cas possibles :

$\mathbf{P}$	$\mathbf{Q}$	$\neg\mathbf{P}$	$\neg\mathbf{Q}$	$(\neg\mathbf{P}) \vee (\neg\mathbf{Q})$	$(\neg\mathbf{P}) \wedge (\neg\mathbf{Q})$	$\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$	$\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$	$\neg\Big(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}\Big)$	$\neg\Big(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}\Big)$
V	V	F	F	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	F	F	V	V

On a décomposé (colonnes 3, 4, 7 et 8) en propositions intermédiaires intervenant dans l'expression finale ; on compare ensuite les colonnes 5 et 9 (négation du ET) puis les colonnes 6 et 10 (négation du OU). Dans chaque cas, les colonnes sont identiques, les propositions $\big(\neg\mathbf{P}\big) \vee \big(\neg\mathbf{Q}\big)$ et $\neg\Big(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}\Big)$ sont donc équivalentes, de même pour les propositions $\big(\neg\mathbf{P}\big) \wedge \big(\neg\mathbf{Q}\big)$ et $\neg\Big(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}\Big)$.

❑ Méthode 1.2.— Traduire une proposition en français en langage mathématique et inversement

- Pour une proposition en français :
  (a) On décompose la proposition en énoncés élémentaires, reliés par des connecteurs logiques, des quantificateurs...
  (b) On repère des expressions comme « pour tout », « il existe » les locutions du type « si... alors ».
  (c) On définit des ensembles associés.
- Pour une proposition en langage mathématique, il suffit de reprendre les définitions des connecteurs et quantificateurs.

Méthodes

Exemples :

1. Soit la phrase : « Tous les humains sont mortels ». On pose E l'ensemble de tous les humains, $P(x)$ la proposition « x est mortel ». La proposition s'écrit alors $\forall x \in E,\ P(x)$.
2. On considère : « Tous les nombres entiers sont soit pairs, soit impairs ».
   On pose $P(x)$: « x est pair » et $Q(x)$: « x est impair » ;
   on peut alors écrire : « $\forall x \in \mathbf{Z},\ P(x) \vee Q(x)$ ».
3. On se donne l'énoncé mathématique suivant : « $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R}, y = x^2$ » se lit : « Pour tout réel x, il existe un réel y tel que y est le carré de x », ou encore, dans un français un peu plus habituel : « Tout réel a pour carré un nombre réel. »

> ❑ **Méthode 1.3.— Exprimer une négation**
> Pour exprimer la négation d'une proposition composée, on peut s'appuyer sur la **proposition 1.3** ou la **proposition 1.8**.

Exemples : On peut reprendre les propositions précédentes et écrire leur négation :

1. En langage mathématique, la négation de $\forall x \in E,\ P(x)$ est $\exists x \in E,\ \overline{P(x)}$, ou encore en français : « Il existe (au moins) un humain immortel ».
2. La négation de « $\forall x \in \mathbf{Z},\ P(x) \vee Q(x)$ » est « $\exists x \in \mathbf{Z}\ /\ \overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}$ » ou bien en français : « Il existe un entier qui n'est ni pair, ni impair ».
3. La négation de « $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R}, y = x^2$ » est « $\exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R}, y \neq x^2$ », ou bien en français, « Il existe un nombre réel dont aucun nombre réel n'est le carré ».

Remarque : Dans ces trois exemples, les propositions initiales sont vraies, donc leurs négations sont fausses.

> ❑ **Méthode 1.4.— Démontrer une implication**
> $P \Rightarrow Q$ peut s'énoncer : « Si P est vraie, alors Q est vraie. »
> On remarque que si P est fausse, alors $P \Rightarrow Q$ est vraie quelle que soit la valeur de vérité de Q. Par exemple « Il pleut $\Longrightarrow$ Il y a des nuages » est une tautologie, c'est-à-dire toujours vraie ; en particulier, s'il ne pleut pas, on ne peut rien en déduire sur l'existence ou pas de nuages.
> Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on ne cherche surtout pas à prouver P, mais on suppose que la proposition P est vraie, et on en déduit Q.

Mise en œuvre : exercice 1.8, **exercice 1.11**.

Remarque : Il est important de remarquer que lorsqu'on s'exprime en français, l'expression « Si ...alors » traduit le plus souvent une équivalence, par exemple la phrase : « S'il fait beau, alors nous irons nous promener » sous entend en outre que s'il ne fait pas beau, nous resterons chez nous ; alors qu'une stricte implication veut dire que nous irons effectivement nous promener s'il fait beau, mais que dans le cas contraire (mauvais temps) rien n'interdit que nous allions tout de même nous promener.