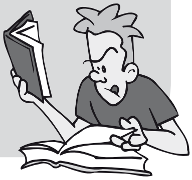
ALGÈBRE

1 COMMENT CALCULER AVEC DES QUOTIENTS ?



Rappels

Le quotient $\frac{a}{b}$ a un numérateur a et un dénominateur b ; il n'est défini que si $b \neq 0$.

$\frac{a}{b}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b \neq 0 \end{cases}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ d \neq 0 \\ ad=bc \end{cases}$	$\frac{a}{b}=c \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ a=bc \end{cases}$

■ Si $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ est nul si et seulement si son numérateur a est nul.

■ Pour tous les résultats suivants, ne pas oublier, lorsqu'il s'agit de lettres, d'écrire que **tout** dénominateur doit être différent de 0.

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	$\frac{a}{b}+c=\frac{a}{b}+\frac{bc}{b}=\frac{a+bc}{b}$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$
$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	$\frac{a}{b}\times c=\frac{a}{b}\times\frac{c}{1}=\frac{ac}{b}$	$\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=1 \qquad c\times\frac{1}{c}=1$
$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$	$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}$	$a:\frac{b}{c}=a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$

Pour additionner deux quotients, il faut les réduire au même dénominateur.

Pour multiplier deux quotients, il ne faut pas les réduire au même dénominateur.

$\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=1 \Leftrightarrow$ l'inverse de $\frac{c}{d}$ est $\frac{d}{c}$. $\qquad$ $c\times\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow$ l'inverse de c est $\frac{1}{c}$.

Diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, c'est multiplier $\frac{a}{b}$ par l'inverse de $\frac{c}{d}$, c'est-à-dire par $\frac{d}{c}$.

Diviser $\frac{a}{b}$ par c , c'est multiplier $\frac{a}{b}$ par l'inverse de c , c'est-à-dire par $\frac{1}{c}$.

Pour $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$, il faut poser les conditions : $b \neq 0$, $d \neq 0$ et $c \neq 0$.

La **seule règle de simplification** des quotients : $\frac{a\times b}{a\times d}=\frac{b}{d}$.

On ne peut simplifier un quotient que si numérateur et dénominateur sont des produits et s'ils ont un facteur commun.

TOP CHRONO
C'est l'interro !

1.1 Exercice (5 pts) *15 min*

1. Calculer les sommes suivantes : $\dfrac{2}{3}+\dfrac{10}{3}$; $\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{3}$; $2+\dfrac{3}{7}$; $\dfrac{5}{28}-3$; $\dfrac{3}{35}+\dfrac{7}{55}$.

2. Calculer les produits et quotients suivants et simplifier si possible :

$\dfrac{3}{11}\times\dfrac{7}{15}$; $\dfrac{4}{9}\times 3$; $\dfrac{2}{15}\times\dfrac{21}{11}\times\dfrac{121}{14}$; $\dfrac{7}{11}:\dfrac{14}{3}$; $\dfrac{14}{13}:7$; $5:\dfrac{10}{9}$.

1.2 Exercice (3 pts) *10 min*

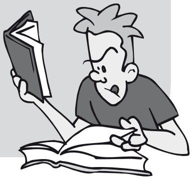
Réduire les sommes suivantes en précisant les conditions d'existence :

$f(x)=\dfrac{3}{x}+\dfrac{x-1}{x}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$; $h(x)=2+\dfrac{1}{x-2}$; $k(x)=\dfrac{2x-1}{x(x-1)}+\dfrac{3}{x}$.

1.3 Exercice (2 pts) *5 min*

Réduire l'expression du nombre : $a=3+\dfrac{2+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{5}{3+\dfrac{1}{4}}}$.

2 COMMENT CALCULER AVEC DES PUISSANCES ?



Définition

Pour a réel et n entier strictement positif, $\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\ facteurs}}$

En particulier : $\boxed{a^1 = a}$. Par convention : $\boxed{a^0 = 1}$ pour $a \neq 0$.

Par définition : $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$ pour tout $a \neq 0$.

L'écriture scientifique d'un nombre est le produit d'un nombre décimal appartenant à l'intervalle $[1\,;10[$ et d'une puissance de 10.

m et n étant deux entiers relatifs, et a et b étant différents de 0 :

$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(ab)^n = a^n \times b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Exemple

Réduire les produits, quotients, puissances suivants :

$5^3 \times 5^9$; $5^3 \times 5^{-9}$; $5^{-2} \times 5^{-7}$; $\dfrac{7^4}{7^2}$; $\dfrac{7^5}{7^9}$; $\dfrac{7^{-4}}{7^{-5}}$; $(9^3)^5$; $(9^{-4})^5$; $(9^{-2})^{-4}$.

$5^3 \times 5^9 = 5^{3+9} = \boxed{5^{12}}$; $5^3 \times 5^{-9} = 5^{3-9} = 5^{-6} = \boxed{\dfrac{1}{5^6}}$; $5^{-2} \times 5^{-7} = 5^{-2-7} = 5^{-9} = \boxed{\dfrac{1}{5^9}.}$

$\dfrac{7^4}{7^2} = 7^{4-2} = \boxed{7^2}$; $\dfrac{7^5}{7^9} = 7^{5-9} = 7^{-4} = \boxed{\dfrac{1}{7^4}}$; $\dfrac{7^{-4}}{7^{-5}} = 7^{-4-(-5)} = 7^1 = \boxed{7.}$

$(9^3)^5 = 9^{3\times 5} = \boxed{9^{15}}$; $(9^{-4})^5 = 9^{(-4)\times 5} = 9^{-20} = \boxed{\dfrac{1}{9^{20}}}$; $(9^{-2})^{-4} = 9^{(-2)\times(-4)} = \boxed{9^8.}$

Exemple

Écrire sous la forme scientifique : $\dfrac{5 \times 10 \times 50 \times 10^{-3}}{2 \times (10^{-3})^3}$ et $\dfrac{0{,}4 \times 13 \times 75 \times (10^2)^3}{25 \times 0{,}3 \times 10 \times 10^{-4}}$.

$$\frac{5 \times 10 \times 50 \times 10^{-3}}{2 \times (10^{-3})^3} = \frac{25 \times 10^{-1}}{2 \times 10^{-9}} = 12{,}5 \times 10^8 = \boxed{1{,}25 \times 10^9.}$$

$$\frac{0{,}4 \times 13 \times 75 \times (10^2)^3}{25 \times 0{,}3 \times 10 \times 10^{-4}} = \frac{0{,}4 \times 13 \times 3 \times 10^6}{0{,}3 \times 10^{-3}} = \frac{0{,}4 \times 13 \times 10^6}{10^{-1} \times 10^{-3}} = \boxed{5{,}2 \times 10^{10}.}$$

TOP CHRONO

C'est l'interro !

2.1 Exercice (5,5 pts) *15 min*

1. Écrire sans parenthèses : $(-2)^5$; $(-3)^4$; $(-5)^{-3}$; $(-7)^{-4}$.

2. Réduire : $3^4 \times 3$; $4^{-2} \times 2^8$; $(-5)^{-2} \times 5^{-7}$; $\dfrac{(-7)^{-5}}{7^2}$.

3. Réduire : $(2^3)^7$; $[(-5)^{-3}]^3$; $\left(\dfrac{6}{35}\right)^4 \times \left(\dfrac{5}{12}\right)^4$; $\dfrac{a \times a^{-5} \times (a^{-2})^{-2}}{(a^{-3})^3}$.

2.2 Exercice (3 pts) *10 min*

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

1. $a = 0{,}00000345$; $b = 1375{,}24 \times 10^{-2}$; $c = 76932{,}15 \times 10^4$.

2. $d = 3{,}4 \times 10^{-7} \times 2{,}7 \times (10^2)^{-5}$; $e = \dfrac{432 \times (10^{-1})^{-3}}{12 \times 10^8}$.

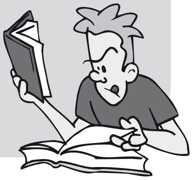
2.3 Exercice (1,5 pts) *5 min*

La planète Z est située à 4 années lumière de la terre. Un vaisseau spatial a mis 15 ans pour aller s'y poser. Quelle a été sa vitesse moyenne en km/h ?

Une année lumière représente $9{,}5 \times 10^{12}$ km.

3

COMMENT CALCULER AVEC DES RADICAUX ?



Définition et propriétés

On appelle racine carrée du réel **positif** a, le réel **positif** noté $\sqrt{a}$ dont le carré est a. Autrement dit : Pour tout $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est le seul réel positif tel que $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$, c'est-à-dire : si $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$ et si $a \leq 0$, $\sqrt{a^2} = -a$.

$\forall a \in \mathbb{R}_+$,$\forall b \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$.

■ Attention : un réel strictement négatif n'a pas de racine :
$\sqrt{x}$ n'est défini que pour $x \geq 0$; $\sqrt{x-1}$ n'est défini que pour $x \geq 1$.

■ Pour obtenir un quotient à dénominateur entier, deux méthodes :

- Multiplier numérateur et dénominateur par "l'expression conjuguée" ;

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c} \quad (b \geq 0, c \geq 0, b \neq c)$$

$$\frac{a}{b-\sqrt{c}} = \frac{a(b+\sqrt{c})}{(b-\sqrt{c})(b+\sqrt{c})} = \frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c} \quad (c \geq 0, b^2 \neq c).$$

- Multiplier par $\sqrt{b}$: $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$ $(b > 0)$, car $\sqrt{b}\sqrt{b} = \left(\sqrt{b}\right)^2 = b$.

Exemple

$$\frac{3}{5-\sqrt{2}} = \frac{3(5+\sqrt{2})}{(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})} = \frac{15+3\sqrt{2}}{25-2} = \boxed{\frac{15+3\sqrt{2}}{23}.}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{5-3} = \boxed{\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}.}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \quad ; \quad \sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = \boxed{|a|\sqrt{b}.}$$

$$\frac{\sqrt{153}}{\sqrt{85}} = \sqrt{\frac{153}{85}} = \sqrt{\frac{17 \times 9}{17 \times 5}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{5}.}$$

TOP CHRONO
C'est l'interro !

3.1 Exercice (5 pts) *15 min*

Réduire les expressions suivantes :

1. $(6-\sqrt{2})^2$ et $(1-\sqrt{5})(2\sqrt{5}-3)$.

2. $(\sqrt{7}+3\sqrt{5})^2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{3}{1-\sqrt{2}}$.

3.2 Exercice (2 pts) *7 min*

Présenter sous la forme d'un quotient à dénominateur entier :

$\dfrac{5-\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}$, $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ et $\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$.

3.3 Exercice (3 pts) *8 min*

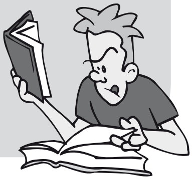
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2=25$ et $x^2=7$.

2. $(2x-1)^2=9$ et $(3-x)^2=2$.

3. $2\sqrt{x^2}-8=0$ et $2(\sqrt{x})^2-8=0$.

4 COMMENT FACTORISER UNE EXPRESSION ?



Propriétés

$ab+ac=a(b+c)$	$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b)$
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$	$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(a-b)(a-b)$

■ Factoriser une expression permet de résoudre une équation de degré supérieur à un, en la ramenant à des équations du premier degré.

■ Factoriser une expression permet aussi de simplifier un quotient.

Exemple
Pour résoudre l'équation $x^2-4x=0$, on l'écrit $x(x-4)=0$.
Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
On a donc $x=0$ ou $x=4$. $\boxed{S=\{0\,;4\}.}$

Exemple
Pour résoudre l'équation : $x^2-4+(3x+6)=0$, on l'écrit :
$(x-2)\underline{(x+2)}+3\underline{(x+2)}=0$, soit $(x+2)(x-2+3)=0$, soit $(x+2)(x+1)=0$.
L'ensemble des solutions est : $\boxed{S=\{-1\,;-2\}.}$

Exemple
Pour simplifier l'expression : $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{2x(x-3)}$, définie si $x\neq 0$ et $x\neq 3$, on écrit :

$$f(x)=\frac{(x-3)^2}{2x(x-3)}=\frac{(x-3)(x-3)}{2x(x-3)}=\frac{x-3}{2x} \text{ pour } x\neq 0 \text{ et } x\neq 3.$$

■ Attention : l'expression $g(x)=\dfrac{x-3}{2x}$ est définie pour tout $x\neq 0$; elle est donc définie pour $x=3$, qui n'annule pas son dénominateur, alors que $f(x)$ n'est pas défini pour $x=3$. $f(x)$ n'est égal à $g(x)$ que pour $x\neq 0$ et $x\neq 3$.

On dit que f a comme ensemble de définition $\mathbb{R}\setminus\{0,3\}$ et que g a comme ensemble de définition $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.