

Table des matières

I	Algèbre	1
1	Nombres complexes	3
1	Rappels	3
1.1	Définitions et règles de calcul	3
1.2	Représentation d'un nombre complexe	3
1.3	Conjugué d'un nombre complexe	4
1.4	Module d'un nombre complexe	4
1.5	Forme trigonométrique d'un nombre complexe	4
1.6	Propriétés des arguments	5
1.7	Formules de trigonométrie	5
1.8	Les complexes et la géométrie	5
1.9	Equation du second degré $az^2 + bz + c = 0$	5
1.10	Racines n-ièmes, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	5
2	Passer d'une forme à une autre	6
3	Résoudre une équation de degré un ou deux	7
4	Déterminer les racines nièmes de Z	8
5	Appliquer les complexes à la trigonométrie	9
6	Démontrer des relations avec des modules	10
7	Exercices	11
7.1	Exercices d'entraînement	11
7.2	Exercices de perfectionnement	16
2	Polynômes	21
1	Rappels	21
1.1	Définitions : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}	21
1.2	Racine d'un polynôme	22
1.3	Dérivation	22
1.4	Division euclidienne	22
2	Factoriser un polynôme	23
3	Effectuer une division euclidienne	24
4	Déterminer le reste de la division de A par B	25
5	Déterminer l'ordre de multiplicité de α	26
6	Déterminer P vérifiant une propriété \mathcal{P}_1	27
7	Montrer que B divise A	28
8	Exercices	29
8.1	Exercices d'entraînement	29
8.2	Exercices de perfectionnement	35

3	Espaces vectoriels	39
1	Rappels	39
1.1	Définitions	39
2	Montrer que F est un espace vectoriel	42
3	La famille $\mathcal{F} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p)$ est-elle libre ou liée ?	43
4	$\mathcal{F} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p)$ est-elle une base de E ?	44
5	Déterminer une base de F	45
6	Montrer que F et G sont supplémentaires.	46
7	Exercices	47
7.1	Exercices d'entraînement	47
7.2	Perfectionnement	53
4	Applications linéaires	57
1	Rappels	57
1.1	Applications linéaires	57
1.2	Noyau et image	58
1.3	Image d'une famille de vecteurs	58
1.4	Projecteurs et symétries	58
1.5	En dimension finie	58
2	Montrer qu'une application est linéaire	59
3	Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ en dimension finie	60
4	Déterminer le rang d'une application linéaire	61
5	Montrer que f est isomorphisme de E dans F	62
5.1	Cas où la dimension n'est pas finie	62
5.2	En dimension finie avec $\dim(E) = \dim(F) = n$	63
6	Caractériser un projecteur, une symétrie	64
7	Démontrer que A est inclus dans B	65
8	Prouver une implication, une équivalence	66
9	Exercices	67
9.1	Exercices d'entraînement	67
9.2	Perfectionnement	72
5	Matrices	81
1	Rappels	81
1.1	Matrice d'une application linéaire	81
1.2	Matrice d'une famille de vecteurs dans une base	82
1.3	L'espace vectoriel $M_{n,p}(\mathbb{K})$	82
1.4	Produit de deux matrices	83
1.5	La multiplication dans $M_n(\mathbb{K})$	83
1.6	Deux utilisations de la multiplication	84
1.7	Matrices inversibles dans $M_n(\mathbb{K})$	84
1.8	Rang d'une matrice	84
2	Montrer que $E \subset M_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel	85
2.1	Les matrices de E sont données explicitement	85
2.2	Les matrices de E sont données par une caractérisation	85
3	Faire un calcul matriciel	86
4	Déterminer $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$	87
4.1	Cas particuliers	87
4.2	Cas général	88

5	Donner la matrice de $\mathbf{f} \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$	89
6	Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$	90
6.1	Quelques cas particuliers	90
6.2	Conjecture puis récurrence	91
6.3	Utilisation de la formule du binôme	92
6.4	Utilisation de suites	93
6.5	Utilisation d'une matrice diagonale	94
7	Déterminer l'inverse d'une matrice A inversible	95
7.1	Cas où on dispose d'une relation du type $P(A) = 0$	95
7.2	Cas où on n'a pas de relation $P(A) = 0$	95
8	Déterminer le rang d'une matrice	96
9	Exercices	97
9.1	Entraînement	97
9.2	Perfectionnement	107
6	Systèmes linéaires	113
1	Rappels	113
1.1	Les opérations élémentaires sur les matrices	113
1.2	Détermination du rang d'une matrice	113
1.3	Résolution d'un système	113
1.4	Inverse d'une matrice carrée inversible	113
2	Déterminer le rang de la matrice A	114
3	Résolution d'un système	115
4	Déterminer la matrice inverse A^{-1}	116
4.1	Par résolution d'un système	116
4.2	En utilisant des matrices	117
5	Exercices	118
5.1	Exercices d'entraînement	118
5.2	Exercices de perfectionnement	121
7	Réduction des matrices	123
1	Rappels	123
1.1	Matrice de passage	123
1.2	Valeurs propres ; vecteurs propres	124
1.3	Diagonalisation d'un endomorphisme	124
1.4	Matrices diagonalisables	124
2	Changement de base	125
3	Montrer que A est ou n'est pas diagonalisable	126
3.1	Utilisation de cas particuliers	126
3.2	Cas général	127
4	Calculer la puissance d'une matrice	128
5	Calculer le terme général de suites récurrentes	129
6	Exercices	130
6.1	Exercices d'entraînement	130
6.2	Exercices de perfectionnement	141

II	Analyse	149
8	Suites	151
1	Rappels	151
1.1	Définitions	151
1.2	Quelques résultats	151
1.3	Théorèmes sur les limites	152
1.4	Suites particulières	152
1.5	Théorèmes	153
1.6	Comparaison des suites	153
2	Montrer qu'une suite est croissante	154
3	Déterminer la limite de (u_n)	155
4	Montrer qu'une suite u converge	156
5	Montrer que u et v sont adjacentes	157
6	Utiliser une suite auxiliaire	158
7	Etudier une suite récurrente linéaire d'ordre 2	159
8	Etudier une suite définie par une équation	160
9	Exercices	161
9.1	Exercices d'entraînement	161
9.2	Exercices de perfectionnement	173
9	Limites, continuité, dérivabilité	179
1	Rappels	179
1.1	Limites et continuité en un point	179
1.2	Relations de comparaison	180
1.3	Continuité sur un intervalle	181
1.4	Dérivabilité	181
1.5	Les nouveaux théorèmes	182
1.6	Dérivée n-ième	182
1.7	Convexité	182
2	Déterminer des limites	183
3	Déterminer un équivalent de f en x_0	184
4	Montrer qu'une fonction f est continue en x_0	185
5	Montrer que l'équation $f(x)=0$ a une solution	186
6	Montrer que f réalise une bijection	187
7	Montrer que f est dérivable en x_0	188
8	Utiliser Rolle et le th des accroissements finis	189
9	Utiliser l'inégalité des accroissements finis	190
10	Montrer que la fonction f est convexe sur I	191
11	Calculer la dérivée nième	192
12	Etudier la fonction f	193
13	Exercices	194
13.1	Exercices d'entraînement	194
13.2	Exercices de perfectionnement	205

10	Intégrales	213
1	Rappels	213
1.1	Propriétés	213
2	Calculer une intégrale par une primitive de f	215
3	Faire une intégration par parties	216
4	Utiliser un changement de variable	217
5	Calculer une intégrale de fonction rationnelle	218
6	Prouver des inégalités entre intégrales	219
7	Etudier une suite d'intégrales	220
8	Etudier une fonction définie par une intégrale	221
9	Calculer une somme de Riemann	222
10	Exercices	223
10.1	Exercices d'entraînement	223
10.2	Exercices de perfectionnement	233
11	Développements limités	245
1	Rappels	245
1.1	Formules de Taylor	245
1.2	Développements limités	246
1.3	Développements classiques	246
1.4	Opérations sur les développements limités en 0	247
2	Développement limité de $f + g$, de fg	248
3	Développement limité de la composée $g \circ f$	249
4	Développement limité d'un quotient	250
5	Développement de $f(x)$ en x_0 et en l'infini	251
6	Utiliser un dl pour déterminer une limite	252
7	Etudier les branches infinies	253
8	Etude locale d'une fonction	254
9	Etude de la nature d'une série	255
10	Utiliser une formule de Taylor	256
11	Exercices	257
11.1	Exercices d'entraînement	257
11.2	Exercices de perfectionnement	267
12	Séries	271
1	Rappels	271
1.1	Définitions et théorèmes	271
1.2	Séries à termes de signe quelconque	271
1.3	Séries à termes positifs	272
1.4	Séries particulières	272
2	Les méthodes élémentaires	273
3	Comparaison avec des séries connues	274
4	Utiliser des développements limités	275
5	Séries de signe quelconque	276
6	Exercices	277
6.1	Exercices d'entraînement	277
6.2	Exercices de perfectionnement	285

13 Fonctions de deux variables	293
1 Rappels	293
1.1 L'ensemble \mathbb{R}^2	293
1.2 Graphes	294
1.3 Continuité	294
1.4 Dérivabilité	295
2 Déterminer l'ensemble de définition de f	297
3 Etudier l'existence d'une limite L en (a, b)	298
4 Déterminer les dérivées partielles	299
5 Etudier l'existence d'un extremum	300
6 Déterminer l'équation d'un plan tangent	301
7 Exercices	302
7.1 Exercices d'entraînement	302
7.2 Exercices de perfectionnement	312
III Probabilités	315
14 Dénombrement	317
1 Rappels	317
1.1 Ensembles	317
1.2 Calcul	318
2 Calculer une somme contenant des combinaisons	319
3 Résoudre un exercice de dénombrement	320
4 Déterminer le nombre d'applications	321
5 Exercices	322
5.1 Exercices d'entraînement	322
5.2 Exercices de perfectionnement	330
15 Probabilités	335
1 Rappels	335
1.1 Le langage des probabilités	335
1.2 Propriétés	336
1.3 Probabilité conditionnelle	337
2 Calculer une probabilité par le dénombrement	338
3 Calculer une probabilité grâce aux axiomes	339
4 Utiliser les probabilités conditionnelles	340
5 Utiliser le théorème des probabilités totales	341
6 Exercices	342
6.1 Exercices d'entraînement	342
6.2 Exercices de perfectionnement	356
16 Variable aléatoire	361
1 Rappels	361
1.1 Définitions	361
1.2 Loi de probabilité d'une v.a.	361
1.3 Espérance d'une v.a.	362
1.4 Moment d'ordre r	362
1.5 Variance d'une v.a.	363

1.6	Lois classiques	363
2	Déterminer la loi d'une v.a. finie	364
3	Utiliser le théorème des probabilités totales	365
4	Calculer $P(X=k)$, $E(X)$ ou $V(X)$: cas fini	366
5	Calculer $P(X=k)$, $E(X)$ ou $V(X)$: cas infini	367
6	Etudier une variable classique	368
7	Exercices	369
7.1	Exercices d'entraînement	369
7.2	Exercices de perfectionnement	383
17	Couples de variables aléatoires	389
1	Rappels	389
1.1	Définitions : les variables sont supposées discrètes	389
1.2	Indépendance de deux v.a.	389
1.3	Fonction de deux v.a.	390
1.4	Covariance	390
1.5	Convergence et approximation	391
2	Représenter la loi conjointe dans un tableau	392
3	Donner la loi conjointe puis les lois de X et Y	393
4	Déterminer les lois de X et de Y	394
5	Déterminer la loi de $X+Y$, XY ,	395
6	Donner une évaluation d'une probabilité	396
7	Exercices	397
7.1	Exercices d'entraînement	397
7.2	Exercices de perfectionnement	410