

Second degré



Problématique

- ➔ Factorisation et résolution d'équation du second degré dans le cas général.



Les mathématiques sont un jeu qu'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles...

David Hilbert (1862-1943)



Points incontournables

- Forme canonique, calcul du discriminant, signe du trinôme.

1 L'ESSENTIEL À CONNAÎTRE

Polynôme du 2nd degré

On appelle **fonction polynôme du 2nd degré** toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme : $P(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b, c (avec $a \neq 0$) sont des réels appelés **coefficients** de P .

Équations du 2nd degré

Expression canonique

Tout polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ du 2nd degré avec a non nul, peut s'écrire sous la forme : $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ appelée **forme (ou expression) canonique** du polynôme P .

Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant du polynôme P .

Résolution d'une équation du 2nd degré

L'existence des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de son discriminant.

L'équation équivaut à l'équation $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$.

On observe ainsi 3 cas :

- Si $\Delta < 0$: l'équation du second degré n'a pas de solution. Le trinôme est le produit de a par la somme de deux réels positifs.
- Si $\Delta = 0$: L'équation du second degré a une solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$ que l'on appelle racine double.
- Si $\Delta > 0$: $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right]$ on reconnaît la différence de deux carrés. L'équation du second degré a deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Factorisation du trinôme

- Si $\Delta < 0$ le trinôme ne se factorise pas.
- Si $\Delta = 0$ la forme factorisée est : $a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$ la forme factorisée est : $a(x - x_1)(x - x_2)$.

À retenir

En mathématiques on appelle racine une solution de l'équation $P(x) = 0$. Il ne faut pas confondre avec la notion de racine carrée.

À retenir

Le discriminant est utilisé pour résoudre des équations du 2nd degré. Si le polynôme est de degré 3 il faut utiliser une autre méthode.

À retenir

Il faut faire très attention aux signes des 3 coefficients car cela peut changer le signe du discriminant. Ne pas oublier que si b est négatif alors son carré sera positif.

■ Signe du trinôme du 2nd degré

Le signe du trinôme dépend du signe du coefficient a et aussi du signe du discriminant.

- Si $\Delta < 0$, le trinôme a le signe de a quelque soit la valeur de x .
- Si $\Delta = 0$, le trinôme s'annule pour $x = x_0$ et il est du signe de a pour toutes les autres valeurs de x .
- Si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a si x est extérieur à l'intervalle des racines et du signe contraire de a si x est compris entre les racines.

À retenir

Ne pas oublier d'ordonner les racines dans l'ordre croissant pour obtenir le bon intervalle.

■ Variations de la fonction trinôme

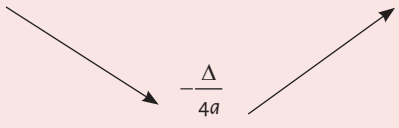
Extremum

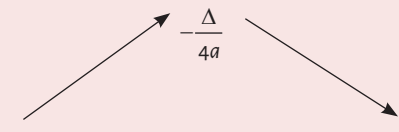
La fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, présente un extremum en $x = -\frac{b}{2a}$, cet extremum vaut $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$.

Cet extremum sera un maximum si $a < 0$ ou un minimum si $a > 0$.

Variations

Les variations dépendent du signe de a , si $a > 0$, la fonction a les mêmes variations que la fonction carré, sinon la fonction a les variations inverses.

x	$-\frac{b}{2a}$
f $a > 0$	

x	$-\frac{b}{2a}$
f $a < 0$	

À retenir

On a déjà vu en 2nde les variations de la fonction carré et celles de la fonction polynôme de 2nd degré.

À retenir

On peut aussi utiliser la notation de seconde, ainsi on peut écrire $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}$.

À retenir

On dit aussi que si $a > 0$ alors la parabole est tournée « vers le haut », et si $a < 0$ alors elle est tournée « vers le bas ».

1 L'ESSENTIEL À CONNAÎTRE

Représentation graphique de la fonction trinôme

Sommet et axe de symétrie

La courbe de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ est une parabole qui admet un axe de symétrie, la droite d'équation :

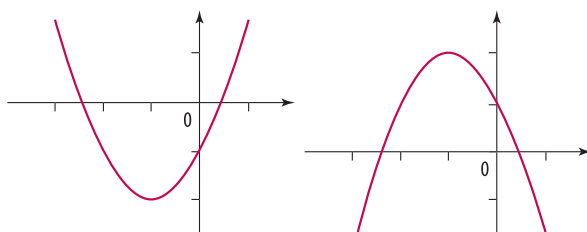
$$x = -\frac{b}{2a}. \text{ Le sommet est le point } S, \text{ tel que : } S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Courbe représentative de f

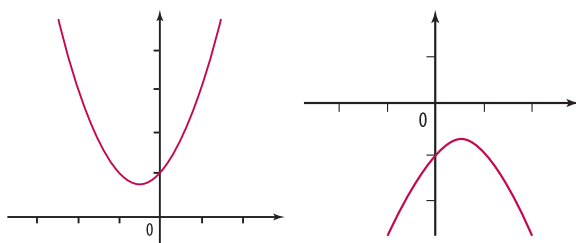
Le signe de a et de Δ donne l'allure de la courbe représentative et le nombre de points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses.

- Si $\Delta > 0$, la parabole coupe l'axe (xx') en deux points ; les abscisses de ces points sont les racines de l'équation $P(x) = 0$.
- Si $\Delta < 0$ elle ne coupe pas l'axe (xx').
- Si $\Delta = 0$ elle est tangente à l'axe (xx') en S .

Ainsi si le discriminant est positif :



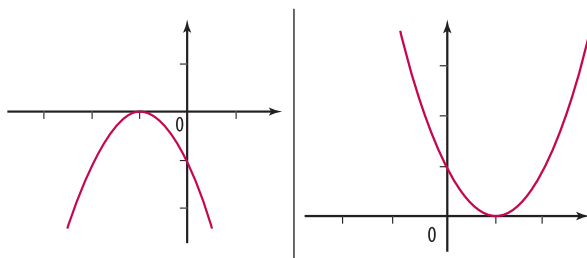
Puis si le discriminant est négatif, on a les allures de courbes suivantes :



À retenir

Ne pas hésiter à visualiser la courbe représentative de la fonction sur la calculatrice graphique.

Enfin si le discriminant est nul, il y a un seul point d'intersection, ce qui donne les allures possibles suivantes :



Je me teste !

1. Peut-on factoriser l'expression $2x^2 - 5x + 3$?

.....

.....

.....

2. L'expression $-x^2 + 2x + 35$ est-elle de signe constant pour tout x ?

.....

.....

.....

3. La fonction $f(x) = 4x + x^2 - 5$ a-t-elle les mêmes variations que la fonction carré ?

.....

.....

.....

➔ Corrigés p. 221

Dernière minute



Ne pas oublier qu'un polynôme du 2nd degré peut s'écrire sous différentes formes : développée ou canonique et pour certains sous forme factorisée. Chaque forme a son importance selon le calcul à faire.

Je lis, je surfe !

- Pour s'entraîner sur des exercices types : « Que faire quand on ne sait pas ? » - Editions Ellipses.
- Pour ceux qui aime surfer, il existe des sites tenus par des enseignants avec des exercices de niveaux variés :
 - ➔ Celui de Yvan Monka : <http://www.maths-et-tiques.fr> avec des vidéos capsules.
 - ➔ Ou <http://xmaths.free.fr/1S/index.htm> avec des rappels de cours, des QCM et des exercices corrigés.
- C'est à Apollonius de Perge que l'on doit le nom de parabole, vous pourrez lire sur internet ce que la science doit à ce géomètre et astronome grec.

1 SAVOIR-FAIRE ET COMPÉTENCES

Savoir factoriser une expression

L'objectif est de pouvoir factoriser une expression qui n'est pas une identité remarquable.

La méthode suit en général 3 étapes :

- On identifie d'abord les valeurs des différents coefficients a , b et c . Il est parfois nécessaire d'arranger l'expression proposée pour la mettre sous la forme $ax^2 + bx + c$ avec a non nul.
- On calcule ensuite la valeur de Δ avec soin car de sa valeur découle le reste. Il ne faut donc pas négliger les signes des différents coefficients a , b et c .
- On identifie ensuite dans quel cas de figure on est : $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$. Et on calcule les racines éventuelles avant de factoriser l'expression.

Faire une fiche récapitulative sur le trinôme du 2nd degré

L'objectif est de pouvoir visualiser l'ensemble des points clés : racines, factorisation, courbe et signe.

On peut utiliser un modèle de ce type :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Racines de P			
Factorisation			

Exemple de courbe si : $a < 0$			
x			
Signe de $P(x)$			

Exemple de courbe si : $a > 0$			
x			
Signe de $P(x)$			

méthodes si on est face à un polynôme de degré supérieur. On pourra par exemple utiliser une racine évidente, ou une première factorisation par x . Dans ce cas vous serez guidé. Enfin si l'expression à étudier est sous forme canonique, il est plus judicieux d'utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2$ pour factoriser plutôt que de développer puis de factoriser avec le discriminant.

Enfin si l'expression à étudier est sous forme canonique, il est plus judicieux d'utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2$ pour factoriser plutôt que de développer puis de factoriser avec le discriminant.

Voici quelques exemples où le second degré s'applique :

- Dans des problèmes d'optimisation : par exemple la recherche d'une aire maximale obéissant à des contraintes de longueurs on obtient une fonction du second degré.
- Dans des problèmes de coût minimal, de bénéfice maximum, les fonctions utilisées seront en général des trinômes dont il faudra calculer les variations.
- On trouve aussi des équations du 2nd degré avec paramètres. Cela signifie qu'il y a dans l'équation en plus de l'inconnue x , une valeur inconnue m et que l'on va discuter suivant les valeurs du réel m . On aura alors une valeur de Δ qui sera en fonction de ce paramètre, et on pourra dans certains cas calculer un second discriminant.



Je prends des notes

1 SAVOIR-FAIRE ET COMPÉTENCES

Un exemple appliqué

Recherche de l'expression analytique d'une fonction

Soit f une fonction polynôme du 2nd degré dont la courbe représentative C passe par le point A de coordonnées $(0; 1)$ et dont le sommet S a pour coordonnées $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

 On veut déterminer l'expression analytique de la fonction.

Une fonction polynôme du 2nd degré s'écrit sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ ou } f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Si $S \in C$ alors ses coordonnées vérifient l'équation sous forme canonique et ainsi : $f(x) = a(x - 1)^2 + \frac{1}{2}$.

Pour déterminer la valeur de a qui est la seule inconnue de l'équation précédente, on remplace par les coordonnées du point A . On obtient alors : $f(0) = 1 \Leftrightarrow a(-1)^2 + \frac{1}{2} = 1$. Soit $a = \frac{1}{2}$.

$$\text{En conclusion : } f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2 - x + 1.$$

NB : avec la forme développée on a 3 inconnues à déterminer, il faut alors trouver 3 équations. Mais si on n'a pas les coordonnées du sommet de la parabole, la forme canonique n'est pas judicieuse.

Je gagne des points !

Traduire les informations du texte sous forme d'équations mathématiques.

Je gagne des points !

Il y a le plus souvent plusieurs méthodes pour aboutir au résultat, il faut donc bien connaître les différentes formes d'écriture d'une expression du 2nd degré.

