

Table des matières

1	La rigueur en mathématiques	1
	Introduction	1
1.1	La géométrie élémentaire	1
1.2	La rigueur dans \mathbb{N}	7
1.3	Le théorème fondamental de l'algèbre	10
2	Analyse de preuves. Le pgcd	19
	Introduction	19
2.1	L'anthyphérèse	19
2.2	Le théorème du pgcd	20
2.3	Une preuve abstraite classique	21
2.4	Une preuve par algorithme	22
2.5	Comparaison des deux preuves	24
2.6	La preuve classique cache-t-elle un algorithme ?	25
3	Les entiers naturels	29
	Introduction	29
3.1	Un texte de Poincaré	29
3.2	Exemples de raisonnements par récurrence	37
3.2.1	Des exemples (trop) simples	37
	La somme des n premiers entiers	37
	Sommations finies	37
	Manque de rigueur ?	39
3.2.2	Un exemple plus difficile	40
3.3	Preuves par algorithme et preuves par récurrence	41
	Récurrence et descente infinie	42
4	Analyse de preuves. Espaces vectoriels et systèmes linéaires	49
	Introduction	49
4.1	Un texte classique sur la théorie « abstraite »	50
4.2	De la méthode du pivot à la théorie de la dimension	53
4.3	Retour sur la théorie abstraite de la dimension	59

5	Points de repères historiques sur l'infini en mathématiques	65
	Introduction	65
5.1	L'infini chez les mathématiciens grecs	65
5.2	La crise des infinitésimaux	67
5.3	La crise des géométries non euclidiennes	68
5.4	Cantor et l'avènement de l'infini actuel	68
5.5	Les paradoxes de la théorie des ensembles	69
5.6	Les avatars de l'hypothèse du continu	71
5.7	Le programme de Hilbert	71
5.8	Le point de vue formaliste	73
5.9	Et demain ?	74
	Annexe 1 : un texte de Poincaré	75
	Annexe 2 : des commentaires sur l'infini	80
6	À propos de Cauchy et de l'uniformité	89
	Introduction	89
6.1	Nombres, quantités, variables, infiniment petits	90
6.1.1	Nombres et quantités	90
6.1.2	Variables, infiniment petits, infiniment grands	92
6.1.3	Le critère de Cauchy	94
6.2	Continuité : globale, locale ou ponctuelle ?	95
6.2.1	Continuité des fonctions : une définition problématique	95
6.2.2	Continuité des fonctions de plusieurs variables	98
6.2.3	Somme d'une série convergente de fonctions continues	100
6.3	Fonction dérivée et théorème des accroissements finis	104
6.4	Conclusion	108
7	Nombres réels et fonctions continues	111
	Introduction	111
7.1	L'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires et sa signification intuitive	111
7.2	Deux preuves	113
7.3	Un algorithme pour le TVI ?	115
7.4	Calculer avec les nombres réels	116
7.5	Calculer avec une fonction continue	118
7.6	Exercices	120
7.7	Ne pas renoncer au théorème des valeurs intermédiaires	126
8	La structure du continu	131
	Introduction	131
8.1	Qu'est-ce que le continu ?	132
8.2	Le théorème de Cantor	132
8.3	Mesurer	134
8.4	Le théorème de Heine-Borel	137

9	Cantor et l'infini actuel	139
	Introduction	139
9.1	Grands résultats sur les petits infinis	139
9.1.1	Définitions et propriétés de base	140
9.1.2	Quelques ensembles dénombrables	144
9.1.3	La puissance du continu	144
9.1.4	Des preuves constructives	147
9.2	Paradoxes et incertitudes en théorie des ensembles	148
9.2.1	Le paradoxe de Cantor-Russell-Skolem	148
9.2.2	Zermelo et Fraenkel colmatent les brèches	149
9.2.3	Le paradoxe de Banach-Tarski	149
9.2.4	Hypothèse du continu et axiome du choix	150
9.2.5	Le réalisme platonicien	150
10	La calculabilité mécanique	153
	Introduction	153
10.1	Machines de Turing	154
10.2	Machine de Turing Universelle	160
10.2.1	Suites effectives et suites mécaniquement calculables	161
10.2.2	Le théorème de Cantor	161
10.2.3	Une Machine de Turing universelle	163
10.2.4	Le théorème d'indécidabilité de Turing	164
10.3	Autres modèles de calcul équivalents	165
10.3.1	Le modèle de calcul imaginé par Gödel	165
10.3.2	La thèse de Church	170
11	On ne peut pas tout savoir	171
	Introduction	171
11.1	Impossibilités liées aux suites calculables d'entiers	171
11.2	Impossibilités liées aux nombres réels	173
11.3	Impossibilité de résolution systématique des problèmes diophantiens	174
11.4	Impossibilités liées aux systèmes de preuves formalisés	175
11.4.1	Les théorèmes d'incomplétude de Gödel	175
11.4.2	Arithmétisation des mathématiques	176
A	Logique Constructive	179
	Introduction	179
A.1	Objets de base, Ensembles, Fonctions	179
A.2	Affirmer signifie prouver	183
A.3	Connecteurs et quantificateurs	184
A.4	Principes d'omniscience	186
A.5	Principes problématiques en mathématiques constructives	189
B	Bibliographie	191
C	Une chronologie de scientifiques	193
	Index	207