

# Table des matières

<b>1</b>	<b>La rigueur en mathématiques</b>	<b>1</b>
	Introduction . . . . .	1
1.1	La géométrie élémentaire . . . . .	1
1.2	La rigueur dans $\mathbb{N}$ . . . . .	7
1.3	Le théorème fondamental de l'algèbre . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Analyse de preuves. Le pgcd</b>	<b>19</b>
	Introduction . . . . .	19
2.1	L'anthyphérèse . . . . .	19
2.2	Le théorème du pgcd . . . . .	20
2.3	Une preuve abstraite classique . . . . .	21
2.4	Une preuve par algorithme . . . . .	22
2.5	Comparaison des deux preuves . . . . .	24
2.6	La preuve classique cache-t-elle un algorithme ? . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Les entiers naturels</b>	<b>29</b>
	Introduction . . . . .	29
3.1	Un texte de Poincaré . . . . .	29
3.2	Exemples de raisonnements par récurrence . . . . .	37
3.2.1	Des exemples (trop) simples . . . . .	37
	La somme des $n$ premiers entiers . . . . .	37
	Sommutations finies . . . . .	37
	Manque de rigueur ? . . . . .	39
3.2.2	Un exemple plus difficile . . . . .	40
3.3	Preuves par algorithme et preuves par récurrence . . . . .	41
	Récurrence et descente infinie . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Analyse de preuves. Espaces vectoriels et systèmes linéaires</b>	<b>49</b>
	Introduction . . . . .	49
4.1	Un texte classique sur la théorie « abstraite » . . . . .	50
4.2	De la méthode du pivot à la théorie de la dimension . . . . .	53
4.3	Retour sur la théorie abstraite de la dimension . . . . .	59

<b>5</b>	<b>Points de repères historiques sur l'infini en mathématiques</b>	<b>65</b>
	Introduction . . . . .	65
5.1	L'infini chez les mathématiciens grecs . . . . .	65
5.2	La crise des infinitésimaux . . . . .	67
5.3	La crise des géométries non euclidiennes . . . . .	68
5.4	Cantor et l'avènement de l'infini actuel . . . . .	68
5.5	Les paradoxes de la théorie des ensembles . . . . .	69
5.6	Les avatars de l'hypothèse du continu . . . . .	71
5.7	Le programme de Hilbert . . . . .	71
5.8	Le point de vue formaliste . . . . .	73
5.9	Et demain ? . . . . .	74
	Annexe 1 : un texte de Poincaré . . . . .	75
	Annexe 2 : des commentaires sur l'infini . . . . .	80
<b>6</b>	<b>À propos de Cauchy et de l'uniformité</b>	<b>89</b>
	Introduction . . . . .	89
6.1	Nombres, quantités, variables, infiniment petits . . . . .	90
6.1.1	Nombres et quantités . . . . .	90
6.1.2	Variables, infiniment petits, infiniment grands . . . . .	92
6.1.3	Le critère de Cauchy . . . . .	94
6.2	Continuité : globale, locale ou ponctuelle ? . . . . .	95
6.2.1	Continuité des fonctions : une définition problématique . . . . .	95
6.2.2	Continuité des fonctions de plusieurs variables . . . . .	98
6.2.3	Somme d'une série convergente de fonctions continues . . . . .	100
6.3	Fonction dérivée et théorème des accroissements finis . . . . .	104
6.4	Conclusion . . . . .	108
<b>7</b>	<b>Nombres réels et fonctions continues</b>	<b>111</b>
	Introduction . . . . .	111
7.1	L'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires et sa signification intuitive . . . . .	111
7.2	Deux preuves . . . . .	113
7.3	Un algorithme pour le TVI ? . . . . .	115
7.4	Calculer avec les nombres réels . . . . .	116
7.5	Calculer avec une fonction continue . . . . .	118
7.6	Exercices . . . . .	120
7.7	Ne pas renoncer au théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	126
<b>8</b>	<b>La structure du continu</b>	<b>131</b>
	Introduction . . . . .	131
8.1	Qu'est-ce que le continu ? . . . . .	132
8.2	Le théorème de Cantor . . . . .	132
8.3	Mesurer . . . . .	134
8.4	Le théorème de Heine-Borel . . . . .	137

<b>9</b>	<b>Cantor et l'infini actuel</b>	<b>139</b>
	Introduction . . . . .	139
9.1	Grands résultats sur les petits infinis . . . . .	139
9.1.1	Définitions et propriétés de base . . . . .	140
9.1.2	Quelques ensembles dénombrables . . . . .	144
9.1.3	La puissance du continu . . . . .	144
9.1.4	Des preuves constructives . . . . .	147
9.2	Paradoxes et incertitudes en théorie des ensembles . . . . .	148
9.2.1	Le paradoxe de Cantor-Russell-Skolem . . . . .	148
9.2.2	Zermelo et Fraenkel colmatent les brèches . . . . .	149
9.2.3	Le paradoxe de Banach-Tarski . . . . .	149
9.2.4	Hypothèse du continu et axiome du choix . . . . .	150
9.2.5	Le réalisme platonicien . . . . .	150
<b>10</b>	<b>La calculabilité mécanique</b>	<b>153</b>
	Introduction . . . . .	153
10.1	Machines de Turing . . . . .	154
10.2	Machine de Turing Universelle . . . . .	160
10.2.1	Suites effectives et suites mécaniquement calculables . . . . .	161
10.2.2	Le théorème de Cantor . . . . .	161
10.2.3	Une Machine de Turing universelle . . . . .	163
10.2.4	Le théorème d'indécidabilité de Turing . . . . .	164
10.3	Autres modèles de calcul équivalents . . . . .	165
10.3.1	Le modèle de calcul imaginé par Gödel . . . . .	165
10.3.2	La thèse de Church . . . . .	170
<b>11</b>	<b>On ne peut pas tout savoir</b>	<b>171</b>
	Introduction . . . . .	171
11.1	Impossibilités liées aux suites calculables d'entiers . . . . .	171
11.2	Impossibilités liées aux nombres réels . . . . .	173
11.3	Impossibilité de résolution systématique des problèmes diophantiens . . . . .	174
11.4	Impossibilités liées aux systèmes de preuves formalisés . . . . .	175
11.4.1	Les théorèmes d'incomplétude de Gödel . . . . .	175
11.4.2	Arithmétisation des mathématiques . . . . .	176
<b>A</b>	<b>Logique Constructive</b>	<b>179</b>
	Introduction . . . . .	179
A.1	Objets de base, Ensembles, Fonctions . . . . .	179
A.2	Affirmer signifie prouver . . . . .	183
A.3	Connecteurs et quantificateurs . . . . .	184
A.4	Principes d'omniscience . . . . .	186
A.5	Principes problématiques en mathématiques constructives . . . . .	189
<b>B</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>191</b>
<b>C</b>	<b>Une chronologie de scientifiques</b>	<b>193</b>
	<b>Index</b>	<b>207</b>