

Table des matières

Présentation de la collection	3
Comment utiliser ce livre ?	5
Quelques conseils pour bien apprendre	7
SAVOIRS	9
Thème 0 - Logique et raisonnement	10
Thème 1 - Calculs algébriques	12
Thème 2 - Ensembles et applications	15
Thème 3 - Complexes	22
Thème 4 - Fonctions de la variable réelle	25
Thème 5 - Primitives usuelles et équations différentielles	30
Thème 6 - Droite réelle	34
Thème 7 - Suites numériques	36
Thème 8 - Limite et continuité	41
Thème 9 - Dérivabilité	45
Thème 10 - Analyse asymptotique	48
Thème 11 - Systèmes linéaires	53
Thème 12 - Calcul matriciel	55
Thème 13 - Entiers naturels et dénombrement	58
Thème 14 - Polynômes	60
Thème 15 - Algèbre linéaire	65
Thème 16 - Matrices et déterminants	72
Thème 17 - Intégration	78
Thème 18 - Séries	82
Thème 19 - Géométrie euclidienne	86
Thème 20 - Probabilités sur un univers fini	92
Thème 21 - Variables aléatoires	96

SAVOIR-FAIRE	101
Thème 0 - Savoir-faire de base	102
Comment montrer une propriété ?	102
Utiliser un raisonnement direct	102
Raisonner par équivalence	102
Raisonner par l'absurde	103
Raisonner par analyse/synthèse	103
Comment montrer une implication ?	104
Utiliser un raisonnement direct	104
Raisonner par l'absurde	105
Raisonner par contraposée	106
Comment montrer une équivalence ?	106
Raisonner par équivalence	106
Raisonner par double implication	107
Comment montrer une propriété valable pour tout entier ?	107
Faire une récurrence	107
Utiliser un raisonnement direct	108
À vous de jouer !	109
Thème 1 - Calculs algébriques	112
Comment effectuer un changement d'indice ?	112
Exprimer le terme général en fonction du nouvel indice	112
Comment additionner deux sommes/multiplier deux produits ?	112
Se ramener à des bornes identiques	112
Comment permuter deux signes sommes/produits ?	113
Permuter le rôle des indices	113
Comment calculer une somme avec des coefficients binomiaux ?	114
Utiliser la formule du binôme de Newton	114
Utiliser les relations du cours	115
Comment simplifier une expression avec des factorielles ?	116
Revenir à la définition de la factorielle	116
Comment déterminer les coefficients binomiaux pour de petites puissances ?	116
Utiliser le triangle de Pascal	116
À vous de jouer !	117
Thème 2 - Ensembles et applications	120
Comment montrer une inclusion ?	120
Montrer l'implication	120
Comment montrer que deux ensembles sont égaux ?	120
Procéder par double inclusion	120
Raisonner par équivalence	121
Comment déterminer l'image réciproque d'un ensemble ?	122
Appliquer la définition	122
Comment déterminer l'image d'une fonction/ d'un ensemble ?	122
Chercher pour quel(s) Y l'équation $f(X) = Y$ admet des solutions	122
Dresser son tableau de variations	124
Comment déterminer si une fonction est surjective ?	124
Déterminer si l'équation $f(X) = Y$ admet des solutions	125
Exhiber un élément qui ne possède pas d'antécédent	125
Dresser le tableau de variations	126
Comment déterminer si une fonction est injective ?	126
Appliquer la définition	126
Trouver deux éléments distincts ayant même image	127
Déterminer ses variations	127
Comment savoir si une fonction est bijective ?	128
Étudier l'équation $f(X) = Y$	128
Exhiber l'inverse de la fonction	129
Étudier l'injectivité et la surjectivité	129
Comment déterminer la bijection réciproque d'une fonction ?	130
Résoudre $f(X) = Y$	130

Comment montrer qu'une fonction induit une bijection?	131
Étudier l'équation $f(X) = Y$	131
Dresser le tableau de variations	131
À vous de jouer!	132
Thème 3 - Complexes	136
Comment déterminer la partie réelle/imaginaire?	136
Utiliser la forme exponentielle	136
Se ramener à une forme algébrique	136
Utiliser la factorisation par l'arc moitié	137
Comment déterminer le module et l'argument?	138
Se ramener à la forme exponentielle	138
Comment transformer une expression trigonométrique?	139
Utiliser la factorisation par l'arc moitié	139
Utiliser la formule d'Euler	140
Utiliser la formule de Moivre	140
Utiliser les formules trigonométriques	141
Comment déterminer une racine carrée?	142
Observer s'il n'y a pas de racine connue	142
Utiliser la forme exponentielle	142
Résoudre un système	142
Comment résoudre une équation complexe?	143
Appliquer la formule du cours	143
Se ramener à une équation qu'on sait résoudre	144
Comment déterminer un lieu géométrique?	146
Utiliser les affixes	146
À vous de jouer!	146
Thème 4 - Fonctions de la variable réelle	150
Comment déterminer le domaine de définition/dérivabilité?	150
Utiliser son cours	150
Comment déterminer les variations d'une fonction?	151
Étudier le signe de la dérivée	151
Comment étudier la réciproque d'une fonction bijective?	152
Utiliser le cours	152
Comment résoudre une équation avec des fonctions circulaires réciproques?	153
Appliquer une fonction circulaire	153
Comment résoudre une équation avec des fonctions hyperboliques?	155
Poser $X = e^x$	155
À vous de jouer!	156
Thème 5 - Primitives usuelles et équations différentielles	158
Comment calculer une intégrale/primitive?	158
Reconnaître une primitive usuelle	158
Faire un changement de variables	158
Faire une intégration par parties	158
Comment intégrer une fonction de la forme $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$?	159
Se ramener à une primitive connue	159
Comment résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1?	160
Résoudre l'équation homogène puis trouver une solution particulière	160
Comment chercher une solution particulière?	161
Essayer des solutions « faciles »	161
Chercher une solution particulière sous la même forme que le second membre	161
Utiliser la méthode de la variation de la constante	162
Comment « recoller » des solutions?	163
Étudier la continuité puis la dérivabilité	163
Comment résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2?	165
Appliquer le cours	165
Comment résoudre une équation quelconque?	167
Chercher les solutions polynômiales	167

Changer de fonction	168
Comment trouver des fonctions satisfaisant une équation fonctionnelle?	170
Se ramener à une équation différentielle	170
À vous de jouer!	171
Thème 6 - Droite réelle	175
Comment montrer des égalités/inégalités avec des parties entières?	175
Revenir à la définition	175
Comment trouver un majorant/minorant?	176
Utiliser l'inégalité triangulaire	176
Étudier une fonction	177
Comment déterminer la borne sup/inf d'un ensemble borné?	178
Trouver un majorant/minorant puis déterminer si c'est le plus petit/grand	178
Étudier les variations d'une fonction	178
Comment majorer/minorer la borne supérieure/inférieure?	179
Utiliser la définition	179
À vous de jouer!	180
Thème 7- Suites numériques	183
Comment montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone?	183
Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$	183
Déterminer si le quotient u_{n+1}/u_n est inférieur ou non à 1	183
Utiliser la définition implicite de la suite	183
Comment déterminer si une suite converge?	184
Utiliser le théorème d'encadrement	184
Étudier sa monotonie et son caractère bornée	185
Étudier des suites extraites	185
Comment déterminer la limite d'une suite?	187
Calculer sa limite	187
Utiliser l'unicité de la limite	188
Encadrer/majorer/minorer la suite	188
Comment donner une expression en fonction de n d'une suite définie par récurrence?	190
Appliquer le cours	190
Se ramener à une suite dont on connaît l'expression	190
Faire une récurrence	191
Comment étudier une suite récurrente définie par une fonction continue?	191
Appliquer le cours	191
À vous de jouer!	194
Thème 8 - Limite et continuité	198
Comment déterminer si une fonction admet une limite?	198
Utiliser les suites	198
Utiliser le théorème de la limite monotone	198
Utiliser le théorème de comparaison ou de minoration/majoration	199
Comment lever l'indétermination dans une limite?	199
Utiliser le théorème de croissances comparées	199
Reconnaître un taux d'accroissement	199
Modifier l'expression	200
Comment déterminer une limite avec des puissances réelles?	200
Revenir à une exponentielle	200
Comment prouver qu'une fonction est continue?	201
Calculer la limite	201
Comment prouver qu'une fonction est prolongeable par continuité?	202
Calculer sa limite	202
Comment déterminer si une équation de la forme $f(x) = g(x)$ admet une solution?	202
Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires	203

Comment montrer qu'une fonction est bornée?	204
Déterminer ses variations	204
Utiliser la continuité sur un segment	204
Comment déterminer les solutions d'une équation fonctionnelle?	205
Trouver des relations de récurrence et des valeurs particulières	205
À vous de jouer!	206
Thème 9 - Dérivabilité	210
Comment déterminer si une fonction est dérivable?	210
Calculer la limite du taux d'accroissement	210
Utiliser le théorème de la limite de la dérivée	210
Comment montrer que la dérivée s'annule?	211
Utiliser Rolle	211
Comment majorer un taux d'accroissement?	213
Utiliser le théorème des accroissements finis	213
Comment calculer la dérivée n -ième d'une fonction?	213
Faire une récurrence	213
Utiliser la formule de Leibniz	214
À vous de jouer!	215
Thème 10 - Analyse asymptotique	217
Comment déterminer un développement limité?	217
Utiliser les développements limités usuels	217
Intégrer un développement limité	218
Comment déterminer le développement limité d'un quotient?	219
Se ramener à un produit	219
Comment déterminer une limite?	220
Déterminer un équivalent	220
Comment déterminer la position relative du graphe par rapport à la tangente?	221
Étudier le signe du premier coefficient non nul d'ordre $k \geq 2$ du développement limité	221
Comment déterminer un équivalent quand on n'a pas l'expression?	221
Utiliser la définition implicite	221
À vous de jouer!	223
Thème 11 - Systèmes linéaires	226
Comment résoudre un système linéaire?	226
Faire des opérations sur élémentaires sur les lignes	226
Comment affirmer qu'un système possède ou non une solution?	227
Échelonner le système	227
À vous de jouer!	228
Thème 12 - Calcul matriciel	231
Comment déterminer le rang d'une matrice?	231
Échelonner la matrice	231
Raisonnement sur les lignes/colonnes en petite dimension	232
Comment déterminer si une matrice est inversible?	232
Observer la matrice	233
Déterminer si le système associé possède une unique solution	233
Comment déterminer l'inverse d'une matrice A ?	233
Résoudre le système $AX = Y$	233
Faire des opérations élémentaires sur les lignes	235
Trouver son inverse	236
Comment déterminer la puissance d'une matrice?	236
Prendre la puissance des coefficients diagonaux	236
Utiliser la formule du binôme de Newton	237
Le montrer par récurrence	238
Remarquer que la matrice s'écrit PMP^{-1}	239
Comment multiplier des matrices de taille n ?	240
Revenir à la définition du produit matriciel	240

À vous de jouer!	240
Thème 13 - Dénombrément	244
Comment déterminer le cardinal d'un ensemble?	244
Utiliser les cardinaux de référence	244
Comment montrer l'existence d'éléments vérifiant la même propriété?	244
Utiliser le principe des tiroirs	245
Comment montrer qu'un entier divise un autre entier?	245
Utiliser les congruences	245
Utiliser le cours	246
Comment montrer qu'il y a une infinité d'entiers vérifiant une propriété?	246
Raisonnement par l'absurde	246
À vous de jouer!	247
Thème 14 - Polynômes	251
Comment déterminer les racines d'un polynôme?	251
Trouver des racines et factoriser	251
Faire un changement de variable	251
Utiliser les relations coefficients/racines	251
Comment factoriser un polynôme en facteurs irréductibles?	252
Chercher les racines sur \mathbf{C}	252
Comment déterminer le reste/quotient de la division euclidienne?	253
Prendre des valeurs particulières judicieusement choisies	253
Comment montrer que $A B$?	255
Comparer les racines	255
Comment déterminer le degré/terme dominant?	255
Faire une récurrence	255
Étudier les coefficients	256
Comment montrer qu'un polynôme est nul?	256
Supposer qu'il ne l'est pas	256
Montrer qu'il a « trop » de racines	256
Comment résoudre une équation fonctionnelle?	257
Déterminer le degré et les racines	257
À vous de jouer!	258
Thème 15 - Algèbre linéaire	261
Comment montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel?	261
Revenir à la définition	261
Montrer que c'est l'espace engendré par une partie	261
Comment montrer une inclusion entre deux sous-espaces vectoriels?	262
Raisonnement avec les éléments	262
Raisonnement avec les ensembles	262
Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux?	262
Montrer la double inclusion	262
Utiliser la dimension	263
Comment montrer qu'une famille est libre?	264
Résoudre un système	264
Prendre des valeurs particulières, dériver ou passer à la limite	265
Reconnaître une famille libre, à permutation près	265
Comment déterminer une base d'un sous-espace vectoriel?	266
Chercher une famille génératrice	266
Comment déterminer la dimension d'un espace vectoriel?	267
Déterminer une base	267
Trouver un isomorphisme	267
Comment montrer qu'une famille donnée est une base d'un sous-espace vectoriel?	268
Utiliser son cardinal	268
Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe?	269
Appliquer la définition	269
Utiliser la dimension	269

Comment montrer que deux sous-espaces de E sont supplémentaires dans E ?	270
Utiliser l'unicité de l'écriture	270
Utiliser les bases	271
Utiliser la dimension	272
Procéder par analyse/synthèse	272
Comment déterminer un supplémentaire dans E d'un sous-espace vectoriel F ?	273
Trouver F' tel que $F + F' = E$ puis montrer que $F \cap F' = \{0\}$	273
Compléter une base	274
Comment montrer qu'une application est linéaire ?	274
Revenir à la définition	274
Comment déterminer l'image d'une application linéaire ?	275
Appliquer la définition	275
Calculer l'image d'une base	276
Utiliser le théorème du rang	277
Comment déterminer le noyau d'une application linéaire ?	277
Appliquer la définition	277
Utiliser le théorème du rang	278
Comment déterminer si une application linéaire f est un isomorphisme ?	278
Résoudre l'équation $f(X) = Y$	278
Déterminer le noyau ou l'image	279
Comment montrer que p est un projecteur ?	279
Montrer que p est linéaire et $p \circ p = p$	279
Comment déterminer les espaces caractéristiques d'un projecteur ?	280
Déterminer son noyau et son image	280
À vous de jouer !	281
Thème 16 - Matrices et déterminant	285
Comment déterminer le noyau d'une application grâce à sa matrice ?	285
Calculer le noyau de la matrice	285
Comment déterminer l'image d'une application linéaire grâce à sa matrice ?	286
Calculer l'image de la matrice	286
Comment déterminer la matrice d'une application linéaire ?	287
Appliquer la définition	287
Comment déterminer si une matrice est inversible ?	289
Calculer son noyau	289
Calculer son déterminant	290
Étudier la bijectivité d'une application qu'elle représente	290
Comment calculer l'inverse d'une matrice ?	290
Trouver l'inverse d'une application	290
Comment calculer un déterminant ?	291
Faire des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes	291
Faire apparaître une relation de récurrence	292
À vous de jouer !	294
Thème 17 - Intégration	298
Comment calculer la limite d'une intégrale ?	298
L'encadrer	298
Utiliser une relation de récurrence	298
Comment reconnaître une somme de Riemann et calculer sa limite ?	299
Faire apparaître une fonction en k/n	299
Comment étudier une fonction définie par une intégrale ?	300
Utiliser le cours	300
Appliquer le théorème des accroissements finis	300
Encadrer l'intégrale	302
À vous de jouer !	303
Thème 18 - Séries numériques	307
Comment déterminer la nature d'une série ?	307
Identifier une divergence grossière	307
Majorer le terme général ou sa valeur absolue	307
Multiplier le terme général par n^α , $\alpha > 1$	307

Déterminer un équivalent du terme général	308
Faire apparaître une somme télescopique	308
Déterminer un développement limité du terme général	309
Comment déterminer la somme d'une série convergente?	309
Reconnaître une somme télescopique	309
Reconnaître une somme géométrique	310
À vous de jouer!	310
Thème 19 - Géométrie euclidienne	314
Comment montrer qu'une application est un produit scalaire?	314
Appliquer la définition	314
Comment déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel?	316
Appliquer la définition	316
Chercher les vecteurs orthogonaux à une base	317
Interpréter les équations de l'espace vectoriel	317
Comment déterminer une base orthonormée?	318
Faire preuve d'intuition	318
Utiliser le procédé de Gram-Schmidt	318
Utiliser un sous-espace vectoriel	319
Comment déterminer le projeté orthogonal?	319
Utiliser l'expression dans une base orthonormée	320
Comment calculer la distance à un espace vectoriel de dimension finie?	320
Utiliser l'orthogonal	320
Déterminer le projeté orthogonal	321
Comment utiliser Cauchy-Schwarz?	322
Reconnaître un produit scalaire	322
À vous de jouer!	322
Thème 20 - Probabilités sur un univers fini	326
Comment calculer la probabilité d'un évènement sans condition?	326
Compter les cas favorables/possibles	326
Calculer la probabilité du contraire	326
Décrire l'évènement comme une réunion d'évènements incompatibles	326
Utiliser un système complet	327
Utiliser la formule des probabilités composées	328
Comment calculer la probabilité d'un évènement avec condition?	328
Utiliser la définition	328
Utiliser la formule de Bayes	329
À vous de jouer!	330
Thème 21 - Variables aléatoires réelles	333
Comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire?	333
Déterminer $P(X = x_i)$, pour tout i	333
Utiliser des inégalités	333
Comment vérifier la loi de probabilité d'une variable aléatoire?	334
Montrer que la somme des probabilités vaut 1	334
Comment déterminer l'espérance?	335
Utiliser sa définition	335
Utiliser la formule du transfert	335
Écrire la variable sous la forme $aY + b$	335
Comment déterminer la variance?	336
Utiliser la définition	336
Utiliser la formule de Huygens	337
Écrire la variable sous la forme $aY + b$	337
Comment déterminer la loi conjointe de deux variables?	338
Calculer la probabilité de chaque évènement	338
Comment estimer l'écart statistique à la moyenne?	339
Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev	339
À vous de jouer!	340
CORRIGÉS DES EXERCICES	343