

# Table des matières

<b>Liminaire</b>	<b>i</b>
<b>I. Intégrale de Riemann</b>	<b>1</b>
I.1. Introduction	1
I.2. Construction de l'intégrale de Riemann	2
I.2.1. Introduction	2
I.2.2. Fonctions en escalier	4
I.2.3. Sommes de Darboux	5
I.2.4. Construction	6
I.2.5. Exemples	8
I.2.6. Sommes de Riemann	10
I.3. Propriétés de l'intégrale de Riemann	12
I.3.1. Linéarité	12
I.3.2. Positivité	13
I.3.3. Produit	14
I.3.4. Théorème fondamental du Calcul Intégral	15
I.3.5. Convergence pour les suites de fonctions	18
I.3.6. Intégrales dépendant d'un paramètre	19
I.3.7. Intégration par parties et changement de variable	21
I.3.8. Formules de la moyenne	23
I.3.9. Annexe	27
I.4. Intégrales généralisées	28
I.4.1. Introduction	28
I.4.2. Fonctions positives	31
I.4.3. Fonctions qui ne sont pas positives	34
I.4.4. Intégrales généralisées de suites de fonctions	38
I.5. Exercices	42
<b>II. Tribus et mesures</b>	<b>47</b>
II.1. Introduction	47
II.2. Tribus de parties	48
II.2.1. Dénombrabilité	48
II.2.2. Tribus	49
II.3. Applications mesurables	55
II.3.1. Définitions	55

II.3.2. Critères de mesurabilité . . . . .	55
II.3.3. Sous-espaces . . . . .	58
II.3.4. Mesurabilité des applications à valeurs réelles . . . . .	59
II.3.5. Opérations sur les applications mesurables . . . . .	63
II.3.6. Fonctions étagées . . . . .	67
II.4. Mesures positives . . . . .	70
II.4.1. Définition - Exemples . . . . .	70
II.4.2. Construction de mesures positives . . . . .	73
II.4.3. Propriétés des mesures positives . . . . .	74
II.4.4. Quelques propriétés de la mesure de Lebesgue . . . . .	78
II.5. Annexe sur la dénombrabilité . . . . .	81
II.6. Exercices . . . . .	85
II.6.1. Dénombrabilité . . . . .	85
II.6.2. Ensembles et applications mesurables . . . . .	86
II.6.3. Mesures positives . . . . .	88
<b>III. Construction de l'intégrale de Lebesgue</b>	<b>93</b>
III.1. Intégration des fonctions étagées positives . . . . .	93
III.2. Intégration des fonctions mesurables positives . . . . .	100
III.2.1. Définition et premières propriétés . . . . .	100
III.2.2. Le Théorème de convergence monotone . . . . .	103
III.2.3. Cas de la mesure de comptage . . . . .	105
III.2.4. Le Lemme de Fatou . . . . .	108
III.3. Fonctions intégrables réelles ou complexes . . . . .	109
III.3.1. Fonctions réelles . . . . .	109
III.3.2. Fonctions à valeurs complexes . . . . .	113
III.4. Comparaison avec l'intégrale de Riemann . . . . .	115
III.4.1. Cas d'un intervalle compact . . . . .	115
III.4.2. Cas des intégrales généralisées . . . . .	117
III.5. Exemples d'intégrabilité . . . . .	119
III.5.1. Mesure de Dirac . . . . .	119
III.5.2. Mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$ . . . . .	119
III.5.3. Mesure-image . . . . .	119
III.5.4. Mesures à densité . . . . .	121
III.5.5. Intégration sur une partie mesurable . . . . .	123
III.6. Exercices . . . . .	124
<b>IV. Théorème de convergence dominée et ses conséquences</b>	<b>127</b>
IV.1. La notion de presque partout . . . . .	127
IV.1.1. Ensembles négligeables . . . . .	127
IV.1.2. Propriétés vraies presque partout . . . . .	129
IV.1.3. Complément . . . . .	135
IV.2. Le Théorème de convergence dominée . . . . .	135
IV.2.1. Théorème de convergence dominée de Lebesgue . . . . .	135
IV.2.2. Quelques exemples d'utilisation . . . . .	141
IV.3. Intégrales dépendant d'un paramètre . . . . .	145

IV.3.1. Position du problème . . . . .	145
IV.3.2. Continuité . . . . .	146
IV.3.3. Limites . . . . .	147
IV.3.4. Dérivabilité . . . . .	148
IV.4. Exercices . . . . .	154
IV.4.1. Théorème de convergence dominée . . . . .	155
IV.4.2. Intégrales dépendant d'un paramètre . . . . .	160
<b>V. Intégration sur un espace produit</b>	<b>165</b>
V.1. Produit d'espaces mesurables . . . . .	165
V.1.1. Tribu engendrée par une famille d'applications . . . . .	165
V.1.2. Produit d'espaces mesurables . . . . .	166
V.1.3. Cas des tribus boréliennes . . . . .	167
V.1.4. Applications mesurables . . . . .	168
V.2. Mesure-produit . . . . .	170
V.2.1. Unicité des mesures . . . . .	170
V.2.2. Définition de la mesure-produit . . . . .	174
V.3. Théorèmes de Fubini . . . . .	180
V.3.1. Cas des fonctions positives . . . . .	180
V.3.2. Fonctions à valeurs réelles ou complexes . . . . .	185
V.3.3. Quelques exemples d'application . . . . .	188
V.4. Exercices . . . . .	196
<b>VI. Les espaces <math>L^p</math></b>	<b>203</b>
VI.1. Espaces $\mathcal{L}^1$ et $L^1$ . . . . .	203
VI.2. Espaces $\mathcal{L}^p$ et $L^p$ pour $1 < p < \infty$ . . . . .	206
VI.2.1. Définition . . . . .	206
VI.2.2. Complétude . . . . .	208
VI.2.3. Inégalité de Hölder . . . . .	209
VI.3. Sous-espaces denses . . . . .	213
VI.3.1. Fonctions étagées . . . . .	213
VI.3.2. Propriétés de régularité des mesures . . . . .	215
VI.3.3. Fonctions continues à support compact . . . . .	219
VI.4. Exercices . . . . .	222
<b>VII. Changement de variable sur un ouvert de <math>\mathbb{R}^N</math></b>	<b>231</b>
VII.1. Propriétés de la mesure de Lebesgue . . . . .	231
VII.2. Théorème général de changement de variable . . . . .	235
VII.2.1. Exemple important : coordonnées polaires dans le plan . . . . .	236
VII.3. Preuve du Théorème de changement de variables . . . . .	238
VII.4. Exercices . . . . .	242
<b>VIII. Séries de Fourier</b>	<b>247</b>
VIII.1. Séries de Fourier des fonctions continues . . . . .	247
VIII.2. Séries de Fourier des fonctions intégrables . . . . .	253
VIII.2.1. Séries de Fourier des fonctions de $\mathcal{L}^1$ . . . . .	253

VIII.2.2. Séries de Fourier des fonctions de $\mathcal{L}^2$ . . . . .	254
VIII.3. Annexe : Rappel sur les espaces de Hilbert . . . . .	256
VIII.3.1. Généralités . . . . .	256
VIII.3.2. Orthogonalité . . . . .	257
VIII.3.3. Bases orthonormées . . . . .	259
VIII.4. Exercices . . . . .	262
<b>IX. Introduction aux Probabilités</b> . . . . .	<b>269</b>
IX.1. Généralités . . . . .	269
IX.1.1. Espace de probabilité . . . . .	269
IX.1.2. Variables aléatoires . . . . .	270
IX.1.3. Loi d'une variable aléatoire . . . . .	271
IX.1.4. Exemples de lois usuelles . . . . .	273
IX.2. Indépendance . . . . .	278
IX.2.1. Événements indépendants . . . . .	278
IX.2.2. Variables aléatoires indépendantes . . . . .	279
IX.2.3. Propriétés des <i>v.a.r.</i> indépendantes . . . . .	281
IX.2.4. Somme de <i>v.a.r.</i> indépendantes . . . . .	283
IX.2.5. Loi des grands nombres . . . . .	286
IX.3. Complément : de l'intérêt de la notion de tribu . . . . .	288
IX.3.1. Tribus indépendantes . . . . .	288
IX.3.2. Tribu asymptotique . . . . .	290
IX.3.3. Loi du 0-1 de Kolmogorov . . . . .	291
IX.4. Exercices . . . . .	294
<b>X. Annexe</b> . . . . .	<b>305</b>
X.1. Construction de la mesure de Lebesgue . . . . .	305
X.1.1. Mesure positive engendrée par une mesure extérieure . . . . .	305
X.1.2. Théorème de prolongement . . . . .	311
X.1.3. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ . . . . .	314
X.1.4. Propriétés de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ . . . . .	319
X.1.5. Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	322
X.2. Théorème de représentation de Riesz . . . . .	322
X.2.1. Préliminaires topologiques . . . . .	322
X.2.2. Énoncé du Théorème de représentation . . . . .	325
X.2.3. Preuve de l'existence . . . . .	326
X.2.4. Annexe : Preuve du Théorème d'Urysohn . . . . .	333
<b>XI. Corrigés des exercices</b> . . . . .	<b>335</b>
XI.1. Exercices du Chapitre I . . . . .	335
XI.2. Exercices du Chapitre II . . . . .	345
XI.2.1. Dénombrabilité . . . . .	345
XI.2.2. Ensembles, applications mesurables . . . . .	347
XI.2.3. Mesures positives . . . . .	352
XI.3. Exercices du Chapitre III . . . . .	360
XI.4. Exercices du Chapitre IV . . . . .	367

XI.4.1. Théorème de convergence dominée . . . . .	371
XI.4.2. Intégrales dépendant d'un paramètre . . . . .	385
XI.5. Exercices du Chapitre V . . . . .	399
XI.6. Exercices du Chapitre VI . . . . .	417
XI.7. Exercices du Chapitre VII . . . . .	440
XI.8. Exercices du Chapitre VIII . . . . .	454
XI.9. Exercices du Chapitre IX . . . . .	471
<b>Liste des notations</b>	<b>509</b>
<b>Index terminologique</b>	<b>511</b>