

Table des matières

Liminaire	i
I. Intégrale de Riemann	1
I.1. Introduction	1
I.2. Construction de l'intégrale de Riemann	2
I.2.1. Introduction	2
I.2.2. Fonctions en escalier	4
I.2.3. Sommes de Darboux	5
I.2.4. Construction	6
I.2.5. Exemples	8
I.2.6. Sommes de Riemann	10
I.3. Propriétés de l'intégrale de Riemann	12
I.3.1. Linéarité	12
I.3.2. Positivité	13
I.3.3. Produit	14
I.3.4. Théorème fondamental du Calcul Intégral	15
I.3.5. Convergence pour les suites de fonctions	18
I.3.6. Intégrales dépendant d'un paramètre	19
I.3.7. Intégration par parties et changement de variable	21
I.3.8. Formules de la moyenne	23
I.3.9. Annexe	27
I.4. Intégrales généralisées	28
I.4.1. Introduction	28
I.4.2. Fonctions positives	31
I.4.3. Fonctions qui ne sont pas positives	34
I.4.4. Intégrales généralisées de suites de fonctions	38
I.5. Exercices	42
II. Tribus et mesures	47
II.1. Introduction	47
II.2. Tribus de parties	48
II.2.1. Dénombrabilité	48
II.2.2. Tribus	49
II.3. Applications mesurables	55
II.3.1. Définitions	55

II.3.2. Critères de mesurabilité	55
II.3.3. Sous-espaces	58
II.3.4. Mesurabilité des applications à valeurs réelles	59
II.3.5. Opérations sur les applications mesurables	63
II.3.6. Fonctions étagées	67
II.4. Mesures positives	70
II.4.1. Définition - Exemples	70
II.4.2. Construction de mesures positives	73
II.4.3. Propriétés des mesures positives	74
II.4.4. Quelques propriétés de la mesure de Lebesgue	78
II.5. Annexe sur la dénombrabilité	81
II.6. Exercices	85
II.6.1. Dénombrabilité	85
II.6.2. Ensembles et applications mesurables	86
II.6.3. Mesures positives	88
III. Construction de l'intégrale de Lebesgue	93
III.1. Intégration des fonctions étagées positives	93
III.2. Intégration des fonctions mesurables positives	100
III.2.1. Définition et premières propriétés	100
III.2.2. Le Théorème de convergence monotone	103
III.2.3. Cas de la mesure de comptage	105
III.2.4. Le Lemme de Fatou	108
III.3. Fonctions intégrables réelles ou complexes	109
III.3.1. Fonctions réelles	109
III.3.2. Fonctions à valeurs complexes	113
III.4. Comparaison avec l'intégrale de Riemann	115
III.4.1. Cas d'un intervalle compact	115
III.4.2. Cas des intégrales généralisées	117
III.5. Exemples d'intégrabilité	119
III.5.1. Mesure de Dirac	119
III.5.2. Mesure de comptage sur \mathbb{N}^*	119
III.5.3. Mesure-image	119
III.5.4. Mesures à densité	121
III.5.5. Intégration sur une partie mesurable	123
III.6. Exercices	124
IV. Théorème de convergence dominée et ses conséquences	127
IV.1. La notion de presque partout	127
IV.1.1. Ensembles négligeables	127
IV.1.2. Propriétés vraies presque partout	129
IV.1.3. Complément	135
IV.2. Le Théorème de convergence dominée	135
IV.2.1. Théorème de convergence dominée de Lebesgue	135
IV.2.2. Quelques exemples d'utilisation	141
IV.3. Intégrales dépendant d'un paramètre	145

IV.3.1. Position du problème	145
IV.3.2. Continuité	146
IV.3.3. Limites	147
IV.3.4. Dérivabilité	148
IV.4. Exercices	154
IV.4.1. Théorème de convergence dominée	155
IV.4.2. Intégrales dépendant d'un paramètre	160
V. Intégration sur un espace produit	165
V.1. Produit d'espaces mesurables	165
V.1.1. Tribu engendrée par une famille d'applications	165
V.1.2. Produit d'espaces mesurables	166
V.1.3. Cas des tribus boréliennes	167
V.1.4. Applications mesurables	168
V.2. Mesure-produit	170
V.2.1. Unicité des mesures	170
V.2.2. Définition de la mesure-produit	174
V.3. Théorèmes de Fubini	180
V.3.1. Cas des fonctions positives	180
V.3.2. Fonctions à valeurs réelles ou complexes	185
V.3.3. Quelques exemples d'application	188
V.4. Exercices	196
VI. Les espaces L^p	203
VI.1. Espaces \mathcal{L}^1 et L^1	203
VI.2. Espaces \mathcal{L}^p et L^p pour $1 < p < \infty$	206
VI.2.1. Définition	206
VI.2.2. Complétude	208
VI.2.3. Inégalité de Hölder	209
VI.3. Sous-espaces denses	213
VI.3.1. Fonctions étagées	213
VI.3.2. Propriétés de régularité des mesures	215
VI.3.3. Fonctions continues à support compact	219
VI.4. Exercices	222
VII. Changement de variable sur un ouvert de \mathbb{R}^N	231
VII.1. Propriétés de la mesure de Lebesgue	231
VII.2. Théorème général de changement de variable	235
VII.2.1. Exemple important : coordonnées polaires dans le plan	236
VII.3. Preuve du Théorème de changement de variables	238
VII.4. Exercices	242
VIII. Séries de Fourier	247
VIII.1. Séries de Fourier des fonctions continues	247
VIII.2. Séries de Fourier des fonctions intégrables	253
VIII.2.1. Séries de Fourier des fonctions de \mathcal{L}^1	253

VIII.2.2. Séries de Fourier des fonctions de \mathcal{L}^2	254
VIII.3. Annexe : Rappel sur les espaces de Hilbert	256
VIII.3.1. Généralités	256
VIII.3.2. Orthogonalité	257
VIII.3.3. Bases orthonormées	259
VIII.4. Exercices	262
IX. Introduction aux Probabilités	269
IX.1. Généralités	269
IX.1.1. Espace de probabilité	269
IX.1.2. Variables aléatoires	270
IX.1.3. Loi d'une variable aléatoire	271
IX.1.4. Exemples de lois usuelles	273
IX.2. Indépendance	278
IX.2.1. Événements indépendants	278
IX.2.2. Variables aléatoires indépendantes	279
IX.2.3. Propriétés des <i>v.a.r.</i> indépendantes	281
IX.2.4. Somme de <i>v.a.r.</i> indépendantes	283
IX.2.5. Loi des grands nombres	286
IX.3. Complément : de l'intérêt de la notion de tribu	288
IX.3.1. Tribus indépendantes	288
IX.3.2. Tribu asymptotique	290
IX.3.3. Loi du 0-1 de Kolmogorov	291
IX.4. Exercices	294
X. Annexe	305
X.1. Construction de la mesure de Lebesgue	305
X.1.1. Mesure positive engendrée par une mesure extérieure	305
X.1.2. Théorème de prolongement	311
X.1.3. La mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}	314
X.1.4. Propriétés de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}	319
X.1.5. Mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d	322
X.2. Théorème de représentation de Riesz	322
X.2.1. Préliminaires topologiques	322
X.2.2. Énoncé du Théorème de représentation	325
X.2.3. Preuve de l'existence	326
X.2.4. Annexe : Preuve du Théorème d'Urysohn	333
XI. Corrigés des exercices	335
XI.1. Exercices du Chapitre I	335
XI.2. Exercices du Chapitre II	345
XI.2.1. Dénombrabilité	345
XI.2.2. Ensembles, applications mesurables	347
XI.2.3. Mesures positives	352
XI.3. Exercices du Chapitre III	360
XI.4. Exercices du Chapitre IV	367

XI.4.1. Théorème de convergence dominée	371
XI.4.2. Intégrales dépendant d'un paramètre	385
XI.5. Exercices du Chapitre V	399
XI.6. Exercices du Chapitre VI	417
XI.7. Exercices du Chapitre VII	440
XI.8. Exercices du Chapitre VIII	454
XI.9. Exercices du Chapitre IX	471
Liste des notations	509
Index terminologique	511