

Table des matières

Avant-propos	i
1 Prérequis	1
1.1 Algèbre tensorielle	1
1.2 Analyse tensorielle	17
2 Position initiale d'une coque ou d'une membrane	23
2.1 Position initiale de la surface moyenne de la coque ou de la membrane	24
2.2 Position initiale de la coque ou de la membrane	33
2.3 Dérivée covariante sur une surface	43
2.4 Théorème de la divergence	47
3 Théorie des coques de Cosserat	49
3.1 Position actuelle de la surface moyenne de la coque	50
3.2 Position actuelle de la coque - Champ de déplacement	51
3.3 Gradient du déplacement	57
3.4 Tenseur de déformation	58
3.5 Principe des puissances virtuelles (PPV)	63
3.6 Champ des vitesses virtuelles	64
3.7 Gradient de la vitesse virtuelle	64
3.8 Puissance virtuelle des quantités d'accélération	64
3.9 Puissance virtuelle des efforts internes	66
3.10 Puissance virtuelle des efforts externes	68
3.11 Equations locales du mouvement et conditions aux limites	74
3.12 Cas de la statique	75
3.13 Une autre façon d'obtenir les équations	75
3.14 Bilan des équations et des inconnues	79
4 Théorie des coques de Reissner-Mindlin	81
4.1 Position actuelle de la surface moyenne de la coque	81
4.2 Position actuelle de la coque - Champ de déplacement	82
4.3 Gradient du déplacement	87
4.4 Tenseur de déformation	87
4.5 Champ des vitesses	88
4.6 Champ des vitesses virtuelles	89
4.7 Puissance virtuelle des quantités d'accélération	90
4.8 Puissance virtuelle des efforts internes	90
4.9 Puissance virtuelle des efforts externes	90
4.10 Equations locales de la dynamique et conditions aux limites	91
4.11 Remarques sur les couples	92

4.12	Cas de la statique	93
4.13	Bilan des équations et des inconnues	93
5	Théorie des coques de Kirchhoff-Love	95
5.1	Position actuelle de la surface moyenne de la coque	95
5.2	Position actuelle de la coque - Champ de déplacement	99
5.3	Tenseur de déformation	102
5.4	Champ des vitesses	104
5.5	Champ des vitesses virtuelles	105
5.6	Puissance virtuelle des quantités d'accélération	107
5.7	Puissance virtuelle des efforts internes	107
5.8	Puissance virtuelle des efforts externes	114
5.9	Equations locales de la dynamique et conditions aux limites	120
5.10	Cas de la statique	123
5.11	Bilan des équations et des inconnues	123
6	Théorie des membranes	125
6.1	Position actuelle de la surface moyenne de la membrane	126
6.2	Position actuelle de la membrane - Champ de déplacement	127
6.3	Gradient du déplacement	130
6.4	Tenseur de déformation	130
6.5	Principe des puissances virtuelles (PPV)	131
6.6	Champ des vitesses virtuelles	131
6.7	Gradient de la vitesse virtuelle	132
6.8	Puissance virtuelle des quantités d'accélération	132
6.9	Puissance virtuelle des efforts internes	133
6.10	Puissance virtuelle des efforts externes	136
6.11	Equations locales du mouvement et conditions aux limites	137
6.12	Théorie des membranes déduite de celle des coques de Cosserat	138
6.13	Théorie des membranes déduite de celle des coques de Kirchhoff-Love	142
6.14	Cas de la statique	144
6.15	Bilan des équations et des inconnues	144
7	Loi de comportement des coques et des membranes	145
7.1	Loi de comportement hyperélastique 3D	146
7.2	Contraintes intégrées pour les coques de Cosserat	149
7.3	Hypothèse de la contrainte normale nulle $\sigma^{33} = 0$	153
7.4	Etat de contrainte plane	154
7.5	Loi de comportement réduite	157
7.6	Contraintes intégrées pour les coques de Reissner-Mindlin	163
7.7	Contraintes intégrées pour les coques de Kirchhoff-Love	164
7.8	Contraintes intégrées pour les membranes	170
7.9	Revue des hypothèses utilisées	171
7.10	Tenseurs tangents	175
8	Théorie linéarisée des coques de Kirchhoff-Love	181
8.1	Principe de la linéarisation	181
8.2	Expression linéarisée du vecteur directeur actuel \mathbf{a}_3	185
8.3	Tenseur de déformation linéarisé	186
8.4	Base naturelle actuelle - Première forme fondamentale de S	187
8.5	Expression linéarisée des courbures actuelles	189
8.6	Expression linéarisée des symboles de Christoffel actuels	189

8.7	Lois de comportement intégrées linéarisées	190
8.8	Equations locales linéarisées et conditions aux limites linéarisées	191
8.9	Exemple : flambement axisymétrique d'une coque cylindrique	194
8.10	Théorie linéarisée des plaques de Kirchhoff-Love	205
8.11	Application au flambement des plaques de Kirchhoff-Love	217
8.12	Exemple : flambement d'une plaque rectangulaire appuyée sur le bord	219
9	Éléments finis de membrane	225
9.1	Rappel du principe des puissances virtuelles pour les membranes	225
9.2	Maillage	226
9.3	Notations matricielles de base	227
9.4	Interpolation de la géométrie	227
9.5	Interpolation du champ de déplacement et du champ des vitesses virtuelles	228
9.6	Gradient du déplacement et gradient des vitesses virtuelles	231
9.7	Discrétisation du gradient du déplacement et du gradient des vitesses virtuelles	232
9.8	Discrétisation du principe des puissances virtuelles	234
9.9	Principe du schéma itératif de Newton-Raphson	239
9.10	Matrice raideur tangente	240
9.11	Traitement de la pression	242
9.12	Programmation des vecteurs forces élémentaires et des matrices élémentaires	249
9.13	Calcul des contraintes de Cauchy dans une membrane	258
9.14	Exemples numériques	261
A	Quelques relations mécaniques en coordonnées curvilignes 3D	267
	Bibliographie	271
	Index	272