Chapitre 1

Hydrostatique

1.1 Introduction

Un fluide est une collection de molécules qui peuvent se déplacer les unes par rapport aux autres. Les fluides se répartissent en deux grandes classes, les liquides et les gaz. Ils se distinguent essentiellement par trois propriétés importantes : le libre parcours moyen λ, c'est-à-dire la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux chocs avec une autre, la masse volumique ρ et la compressibilité (Tab. 1.1). De la différence entre les libres parcours moyen découlent des propriétés très différentes (notamment la compressibilité et la viscosité) entre les liquides et les gaz : toutefois, les équations décrivant le mouvement des fluides sont communes aux gaz et aux liquides. Nous commencerons dans ce premier chapitre par poser les lois régissant les fluides au repos (sans mouvement).

TABLE 1.1: Principales propriétés des liquides et des gaz.

Propriété	Liquide	Gaz
Libre parcours moyen	$(3 < \lambda < 5)$ Å	$(30 < \lambda < 50)$ Å
Masse volumique	$\rho \approx 10^3$ kg.m^{-3}	$\rho \approx 10$ kg.m^{-3}
Compressibilité	Non ($\rho \approx$ constante)	Oui ($\rho \neq$ constante)

1.2 Hypothèse de continuité

Soit une surface $\mathcal{S}$ de volume $\mathcal{V}$ contenant une masse m de fluide. La masse volumique ρ se définit par

$$\rho = \lim_{\mathcal{V}\to 0} \frac{m}{\mathcal{V}},$$

ce qui suppose que la masse volumique est constante sur l'ensemble du volume $\mathcal{V}$. La masse volumique se définit de manière analogue à la dérivée, c'est-à-dire qu'elle correspond à la limite du rapport d'une grandeur sur une quantité infinitésimale, soit ici, une masse et un élément infinitésimal de volume. Cette définition implique que la mécanique des fluides considère des milieux continus. Toutefois les propriétés des fluides résultent du fait qu'ils sont en réalité constitués des entités discrètes que sont les molécules. La notion de continuité implique que la masse volumique ρ existe quel que soit le volume

$\mathcal{V}$ considéré et qu'il est impossible à une quantité de fluide de quitter un domaine de l'espace pour un autre sans traverser l'espace situé entre ces deux domaines.

1.3 Forces appliquées à un fluide

Sur un volume $\mathcal{V}$ de fluide agissent des forces qui se répartissent en deux classes : les forces de volumes qui agissent en chaque point du fluide et les forces de surface qui agissent en chaque point de la surface $\mathcal{S}$ délimitant le volume $\mathcal{V}$ de fluide étudié. La force de volume, toujours présente dans les cas considérés dans ce cours, résulte de l'accélération de la pesanteur. Dans certains cas, il peut y en avoir d'autres, comme des forces magnétiques (présentes dans les étoiles), des forces d'inerties (présentes dans les fluides en rotation), etc.

En mécanique du solide, les forces appliquées au système étudié sont toujours liées à la variation de la quantité de mouvement $\vec{p}$ selon le principe fondamental de la dynamique

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\text{appliquées}} \, .$$

Puisque le corps est un solide S de masse m constante, nous avons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\vec{V}\right) = \underbrace{\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{V}}_{=\vec{0}} + m\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}}_{=\vec{A}} = \sum \vec{F}_{\text{appliquées}}$$

où $\vec{V}$ et $\vec{A}$ sont respectivement le vecteur vitesse et le vecteur accélération du solide S. Il reste finalement

$$m\vec{A} = \sum \vec{F}_{\text{appliquées}} \, ,$$

ce qui constitue le principe fondamental de la dynamique à peu près tel qu'il a été énoncé par Leonhard Euler (1707-1783) en 1750 qui concluait que [1]

> [ce principe] contient tout seul tous les principes qui peuvent conduire à la connaissance du mouvement de tous les corps, de quelque nature qu'ils soient.

Lorsque la masse est conservée, les forces peuvent donc être vues comme le produit d'une masse par une accélération. Par exemple, la force de pesanteur est définie comme

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

où m est la masse du corps considéré et $\vec{g}$ l'accélération de la pensanteur dont le vecteur est toujours dirigé verticalement et de haut en bas (vers le sol). Nous verrons qu'en mécanique des fluides, l'écriture des équations peut être simplifiée en utilisant une force volumique, c'est-à-dire une force par unité de volume, soit

$$\vec{F}_{\mathcal{V}} = \frac{\vec{F}}{\mathcal{V}} = \frac{m\vec{g}}{\mathcal{V}} = \rho\vec{g} \, ,$$

où ce n'est donc plus la masse qui intervient mais la masse volumique $\rho = \frac{m}{\mathcal{V}}$. Ici l'indice $_\mathcal{V}$ a été apposé à la force volumique ; afin de ne pas surcharger les écritures, cet indice sera omis par la suite lorsque le contexte sera suffisamment explicite pour être assuré que c'est bien d'une force volumique dont il s'agit. Les unités d'une force sont

$$[F] = [m]\cdot[g] = \text{ kg} \times \text{ m.s}^{-2} = \text{ N}$$

1. L. Euler, Découverte d'un nouveau principe de mécanique, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, **6**, 185-217, 1752.

alors que celles d'une force volumique sont

$$[F_{\mathcal{V}}] = [\rho] \cdot [g] = \text{ kg.m}^{-3} \times \text{ m.s}^{-2} = \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-2} = \text{ N.m}^{-3}\,.$$

Les forces de surface, contrairement aux forces de volumes, sont uniquement appliquées au niveau de la surface $\mathcal{S}$ délimitant le volume $\mathcal{V}$ étudié. Prenons l'exemple d'un élément de force $\mathrm{d}\vec{F}$ appliqué à un élément de surface $\mathrm{d}S$ (FIG. 1.1). L'élément de surface est orienté par un vecteur normal $\vec{n}$ à l'élément de surface $\mathrm{d}S$ et orienté de l'intérieur vers l'extérieur de la surface (un volume $\mathcal{V}$ est toujours délimité par une surface fermée $\mathcal{S}$). L'élément de force $\mathrm{d}\vec{F}$ peut se décomposer selon la normale $\vec{n}$ à l'élément de surface $\mathrm{d}S$ et selon une direction tangente $\vec{\tau}$ à cet élément $\mathrm{d}S$, soit

$$\mathrm{d}\vec{F} = \underbrace{\mathrm{d}\vec{F}_n}_{\text{normale}} + \underbrace{\mathrm{d}\vec{F}_\tau}_{\text{tangentielle}}$$

où la composante normale correspond à la pression P et la composante tangentielle est associée aux frottements ou à une contrainte de cisaillement.

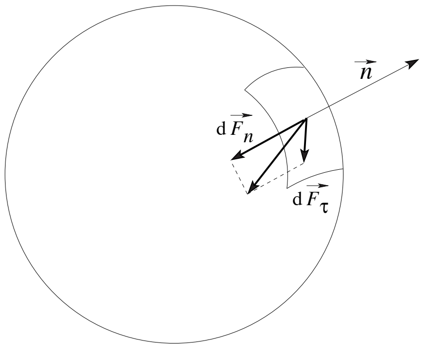


FIGURE 1.1: Action d'un élément de force $\mathrm{d}\vec{F}$ sur un élément $\mathrm{d}S$ de la surface fermée $\mathcal{S}$ délimitant le volume $\mathcal{V}$.

Les forces de pression agissent donc perpendiculairement à la surface. La normale $\vec{n}$ oriente l'élément de surface de l'intérieur vers l'extérieur ; l'élément de force s'écrit alors

$$\mathrm{d}\vec{F} = -P\,\mathrm{d}S \cdot \vec{n} + \tau\,\mathrm{d}S \cdot \vec{\tau}\,, \tag{1.1}$$

où $\vec{\tau}$ est ici le vecteur directeur unitaire tangent à la surface S au point d'application de la force $\mathrm{d}\vec{F}$ et P la pression régnant à l'intérieur de la surface fermée. La pression P, pression à l'extérieur de la surface fermée $\mathcal{S}$, agit de l'extérieur vers l'intérieur de la surface $\mathcal{S}$, justifiant ainsi le signe du premier membre de l'équation (1.1).

Si le système est à l'équilibre, le fluide considéré n'est pas en mouvement ($\vec{V} = \vec{0}$) et nous parlons d'*hydrostatique*. L'équilibre d'un fluide ne peut être atteint que s'il n'y a pas de composante tangentielle ($\vec{F}_\tau = \vec{0}$) : en effet, s'il n'y a pas de mouvement, il ne peut y avoir de frottement. Dans ce cas, les forces de surfaces se résument à

$$\mathrm{d}\vec{F} = -P\,\mathrm{d}S \cdot \vec{n}\,,$$

c'est-à-dire que les forces de surface sont toujours perpendiculaires à la surface. En d'autres termes, les forces de surface se résument à des forces de pression.

Si le fluide est en mouvement, nous parlons d'hydrodynamique. Si la vitesse est faible ou qu'il y a peu de frottements, la composante tangentielle des forces de surface peut être négligée ($\mathrm{d}\vec{F}_\tau \approx \vec{0}$) et nous parlons de *fluide parfait*. Si la vitesse est importante, ou si les frottements sont suffisamment importants pour ne plus être négligés ($\mathrm{d}\vec{F}_\tau \neq \vec{0}$), nous parlons de *fluides réels*.

1.4 Principe fondamental de l'hydrostatique

Archimède (-287 ;-212) fut probablement le premier à étudier des problèmes où les fluides étaient à l'équilibre [2]. Le principe fondamental de l'hydrostatique — définissant les conditions d'équilibre d'une masse de fluide — fut énoncé par Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) alors qu'il travaillait sur la figure de la terre [3]

> Afin qu'une masse de fluide puisse être en équilibre, il faut que les efforts de toutes les parties du fluides renfermées dans un canal quelconque rentrant en lui-même se détruisent mutuellement.

Comme pour tout système à l'équilibre, le principe fondamental de la dynamique appliqué à une masse de fluide se réduit à

$$\sum \vec{F}_{\text{appliquées}} = \vec{0}$$

puisque l'accélération résultante $\vec{A}$ est nécessairement nulle. Il en résulte que

$$\vec{F}_{\mathcal{S}} + \vec{F}_{\mathcal{V}} = \vec{0}\,.$$

De plus, puisque la composante tangentielle $\vec{F}_\tau$ est nécessairement égale au vecteur nul en l'absence de tout mouvement, il reste finalement

$$\vec{F}_n + \vec{F}_{\mathcal{V}} = \vec{0}$$

où $\vec{F}_n$ désigne ici les forces de surface normale à la surface $\mathcal{S}$, c'est-à-dire les forces de pression. Lorsque les forces de volume se réduisent à des forces de pression, cette condition d'équilibre se traduit par le fait que les forces de pression s'équilibrent avec la force de pesanteur.

Soit une masse m de fluide délimitée par une surface fictive cylindrique $\mathcal{S}$ orientée selon l'axe Oz entre les altitudes z_{A} et z_B (Fig. 1.2). Les forces de volume se réduisent ici à l'action de la pesanteur, soit

$$\vec{F}_{\text{volume}} = \int_{\mathcal{V}} \rho\vec{g}\,\mathrm{d}v$$

et les forces de surface à

$$\vec{F}_{\text{surface}} = \int_{\mathcal{S}} -P\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s\,.$$

Puisque la somme des forces appliquées est nulle, nous avons donc

$$\int_{\mathcal{V}} \rho\vec{g}\,\mathrm{d}v + \int_{\mathcal{S}} -P\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \vec{0}\,.$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \rho\vec{g}\,\mathrm{d}v}_{\propto\hat{z}} - \underbrace{\int_{\mathcal{S}_{\mathrm{A}}} P\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s}_{\propto\hat{z}} - \underbrace{\int_{\mathcal{S}_c} P\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s}_{\propto\hat{z}_\perp} - \underbrace{\int_{\mathcal{S}_B} P\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s}_{\propto\hat{z}} = \vec{0}\,.$$

2. Archimède, Des corps flottants (Traduction A. Legrand), *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, II, **10**, 437-457, 1891.
3. A.-C. Clairaut, *Théorie de la figure de la Terre tirée des principes de l'hydrodynamique*, Durand (Paris), 1743.

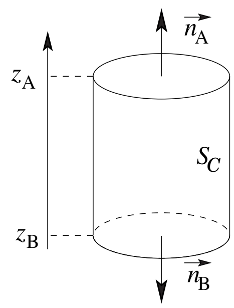


FIGURE 1.2: Volume $\mathcal{V}$ de fluide délimité par une surface cylindrique $\mathcal{S}$.

La troisième intégrale sur la surface $\mathcal{S}_c$ doit être nulle car c'est la seule composante perpendiculaire à l'axe Oz, condition nécessaire pour que le fluide soit au repos. Pour assurer

$$-\int_{\mathcal{S}_c} P \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s = \vec{0}\,,$$

il est nécessaire que le terme $P \cdot \vec{n}$ soit axi-symétrique, quel que soit le contour $\mathcal{C}$ choisi (nous pourrions raisonner de manière très générale sur une surface $\mathcal{S}$ quelconque). La seule hypothèse générale valide pour tout type de contour se réduit au fait que la pression ne doit dépendre que de l'altitude z, soit $P = P(z)$. L'intégrale sur $\mathcal{S}_c$ peut alors se réécrire sous la forme

$$-\int_{\mathcal{S}_c} P \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s = -\int_{z_B}^{z_A} P(z) \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} \vec{n}\,\mathrm{d}l}_{=\vec{0}\,\forall \mathcal{C}}\ \mathrm{d}z$$

qui est nulle quel que soit le contour $\mathcal{C}$. Il reste alors

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \cdot \vec{g}\,\mathrm{d}v - \int_{\mathcal{S}_A} P \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s - \int_{\mathcal{S}_B} P \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s = \vec{0}\,.$$

Puisque la pression ne dépend que de l'altitude z,

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \cdot \vec{g}\,\mathrm{d}v - P(z_A) \cdot S_A \cdot \hat{z} + P(z_B) \cdot S_B \cdot \hat{z} = \vec{0}\,.$$

Par ailleurs, l'intégrale de volume vaut

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \cdot \vec{g}\,\mathrm{d}v = -\rho g \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}v \cdot \hat{z} = -\rho g S \int \mathrm{d}z \cdot \hat{z}$$

où S est la section du cylindre. Nous avons alors

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \cdot \vec{g}\,\mathrm{d}v = -\rho g S\,[z]_{z_B}^{z_A} = -\rho g S (z_A - z_B)\,.$$

En posant $P_A = P(z_A)$, $P_B = P(z_B)$ et $S = S_A = S_B$, il reste

$$P_B - P_A = \rho g \left(z_A - z_B\right)\,. \tag{1.2}$$

N'interviennent dans ce raisonnement que les deux interfaces A et B, les autres parties de la surface fermée n'interviennent pas car la pression est constante sur chaque tranche horizontale de fluide : les contributions se compensent deux-à-deux et ne contribuent donc que les éléments de surface ayant une projection horizontale non nulle (FIG. 1.2b).

La relation (1.2) peut être réécrite sous la forme

$$P_{\mathrm{A}} + \rho g z_{\mathrm{A}} = P_{\mathrm{B}} + \rho g z_{\mathrm{B}} \,,$$

c'est-à-dire que

$$\boxed{P + \rho g z = \text{constante}}$$

sur l'ensemble du volume $\mathcal{V}$. C'est le principe fondamental de l'hydrostatique.

Corollaire 1. *Toute section horizontale d'un fluide à l'équilibre est* ISOBARE *(d'égale pression).*

C'est la seule hypothèse générale que nous avons dû faire pour s'assurer de la condition d'équilibre. Cela se retrouve facilement à partir de la relation $P+\rho g z =$ constante. Soient deux points A et B d'un même fluide situés dans une section horizontale d'un même fluide, c'est-à-dire tels que $z_{\mathrm{A}} = z_B = z$. Puisque

$$P + \rho g z = \text{ constante} \,,$$

il vient que

$$P_{\mathrm{A}} + \rho g z = P_B + \rho g z \quad \Leftrightarrow \quad P_{\mathrm{A}} = P_B \,.$$

Corollaire 2. *La surface libre d'un liquide est une surface* ISOBARE.

Puisque la surface libre est en contact avec l'atmosphère, la pression à la surface libre est égale à la pression atmosphérique P_{atm}.

Corollaire 3. *Toute variation de pression en un point d'un fluide incompressible se transmet intégralement dans toutes les directions et à la vitesse du son dans ce fluide.*

Une onde acoustique correspond donc à une onde de pression : en conséquence, une variation de pression se propage à la vitesse du son dans le milieu considéré.

La quantité $P + \rho g z$ a pour unité

$$\begin{aligned} [\rho g z] &= \mathrm{kg.m^{-3}.m.s^{-2}.m} \\ &= \underbrace{\mathrm{kg.m^{+2}.s^{-2}}}_{\text{énergie potentielle}} \mathrm{.m^{-3}} \end{aligned}$$

puisque l'unité de l'énergie potentielle (par exemple) est

$$[mgz] = \mathrm{kg.m^{+2}.s^{-2}} \,.$$

Le terme $\rho g z$ est donc un terme d'*énergie volumique*, c'est-à-dire un terme d'énergie par unité de volume.

Cas d'un fluide stratifié. Considérons maintenant le cas d'une couche stratifiée de deux fluides non miscibles de masses volumiques respectives ρ_1 et ρ_2 telles que $\rho_1 > \rho_2$, et séparés par une interface I (Fig. 1.3). Au sein du fluide 1, nous appliquons le principe fondamental de l'hydrostatique, soit

$$P_1 + \rho_1 g z_1 = P_I + \rho_1 g z_I \tag{1.3}$$

où z_1 désigne l'altitude d'un point quelconque au sein du fluide 1 et z_I l'altitude d'un point du fluide 1 au niveau de l'interface I. Au sein du fluide 2, nous avons par ailleurs

$$P_2 + \rho_2 g z_2 = P_I + \rho_2 g z_I \tag{1.4}$$

où z_2 désigne l'altitude d'un point quelconque au sein du fluide 2 et z_I l'altitude d'un point du fluide 2 au niveau de l'interface I. Il importe de remarquer qu'au niveau de l'interface

$$P_I + \rho_1 g z_I \neq P_I + \rho_2 g z_I$$

puisque $\rho_1 \neq \rho_2$. Le premier enseignement de ce résultat est que la quantité $P + \rho g z$ n'est constante qu'au sein d'un même fluide.

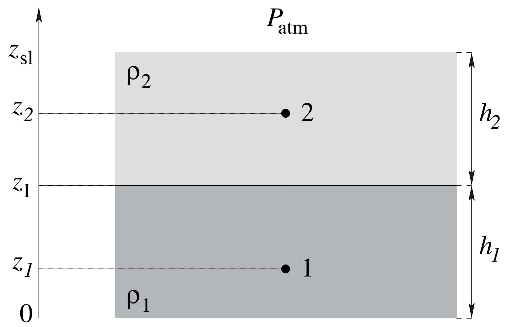


Figure 1.3: Couche de fluide stratifiée : une interface I sépare les deux fluides non miscibles de masses volumiques respectives ρ_1 et ρ_2.

Si nous écrivons l'énergie volumique à la surface libre, nous obtenons

$$P_{\mathrm{atm}} + \rho_2 g\,(h_1 + h_2) = K_2\,.$$

A l'altitude de référence ($z = 0$), l'énergie volumique est donnée par

$$\underbrace{P_{\mathrm{atm}} + \rho_1 g\, h_1 + \rho_2 g\, h_2}_{=P_0} = K_1\,.$$

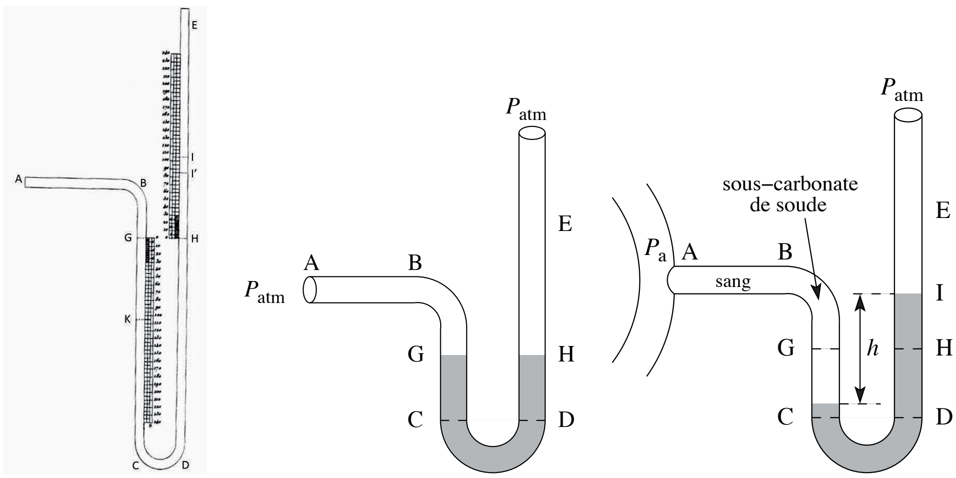
De ce fait, les énergies volumiques dans les fluides 1 et 2 diffèrent au niveau de l'interface de la quantité

$$\begin{aligned} K_1 - K_2 &= P_{\mathrm{atm}} + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1 - P_{\mathrm{atm}} - \rho_2 g h_2 - \rho_2 g h_1 \\ &= (\rho_1 - \rho_2)\, g h_1\,. \end{aligned}$$

L'énergie volumique — constante au sein d'un même fluide — diffère d'un fluide à l'autre en raison de la différence entre les énergies potentielles qui sont respectivement $\rho_1 g h_1$ au sein du fluide 1 et $\rho_2 g h_1$ au sein du fluide 2. Il n'y a donc pas conservation de l'énergie volumique de part et d'autre d'une interface entre deux fluides de masses volumiques différentes.

Application au tube en U. C'est dans le cadre de sa thèse sur la ≪ *force du cœur aortique* ≫ que Jean-Louis-Marie Poiseuille (1797-1869) a développé un tube en "U" (Fig. 1.4a) pour mesurer la pression aortique. Il décrit son tube ainsi [4] :

> Soit un tube en verre (Fig. 1.4a), présentant une branche horizontale AB, une branche verticale BC, et une troisième branche ascendante DE, courbé
>
> de manière à offrir en B un quart de cercle, et en CD un demi-cercle : supposons que l'on mette du mercure dans la partie GDCH, le tube étant dans une position verticale, les niveaux G et H du mercure seront à la même hauteur dans les deux branches (Fig. 1.4b). Si le sang s'introduit dans la partie ABG par l'orifice A, abouché à une artère, il pressera sur la surface G du mercure ; le métal [mercure] sera déprimé dans la branche BC de G en K, par exemple, lorsqu'il s'élevera dans la branche DE en I. Il est évident, d'après les lois de l'hydrostatique, que la force totale, avec laquelle le sang se meut dans l'artère, sera mesurée par le poids d'un cylindre de mercure, dont la base est un cercle qui a pour diamètre celui de l'artère, et dont la hauteur est la différence IK des deux niveaux du mercure qui peut faire équilibre à la colonne sanguine BK.



(a) Schéma original (b) Non branché (c) ≪ *abouché* ≫ à une artère

Figure 1.4: Tube en "U" élaboré par Poiseuille pour la mesure la pression aortique.

En fait, Poiseuille a compris que les mesures de Stephen Hales (1677-1661) [5] étaient entachées d'erreur en raison de la coagulation du sang ; aussi, il plaçait du sous-carbonate de soude (obtenu en portant à ébullition du carbonate de soude) dans la partie AG de son tube avant de le connecter à l'artère. Poiseuille détaille par exemple une mesure de la pression aortique d'un chien ; ayant mesuré BG = 25 mm et HI = 105 mm, sachant qu'une colonne de sous-carbonate de soude et de sang d'une hauteur de 10 mm correspondait à 1 mm de mercure, et que Poiseuille prenait pour altitude de référence celle des points G et H, c'est-à-dire que $z_{\text{G}} = z_{\text{H}} = 0$, la pression aortique du chien, exprimée en mmHg, est donc donnée par la relation

$$\frac{P_{\text{a}} + P_{\text{atm}}}{\rho_{\text{Hg}}\, g} + \frac{z_{\text{B}} - z_{\text{C}}}{10} = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho_{\text{Hg}}\, g} + z_{\text{I}} - z_{\text{D}}$$

4. J.-L.-M. Poiseuille, *Recherches sur la force du cœur aortique*, Didot le jeune, Paris, 1828.
5. S. Hales, An account of some hydraulicks and hydrostatistical experiments made on blood and blood-vessels in animals, in *Statistical Essays*, London, 1733.