Chapitre 1

Généralités

On a rassemblé dans ce chapitre quelques notions sommaires sur les espaces préhilbertiens, les espaces vectoriels normés, les espaces métriques ainsi que sur la topologie dans $\mathbb{R}^n$ et il est préférable de les passer en première lecture et de se borner à les consulter au moment de l'usage.

On désigne par $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$, le produit (ensembliste) de n copies de $\mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble de n-uplets ordonnés $(x_1, ..., x_n)$ de nombres réels. En définissant l'addition et la multiplication par un réel,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad &, \quad (x, y) \longmapsto x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad &, \quad (\lambda, x) \longmapsto \lambda x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n), \end{aligned}$$

on munit $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Il est de dimension n et a pour base canonique les n vecteurs $(1, 0, ..., 0)$, $(0, 1, 0, ..., 0)$,...,$(0, ..., 0, 1)$.

1.1 Produit scalaire, espace préhilbertien

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1 *Un produit scalaire sur E est une application*

$$\langle ., . \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K},$$

qui satisfait aux conditions suivantes :
(i) $\langle ., . \rangle$ est sesquilinéaire :

$$\forall x_1, x_2, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \overline{\alpha} \langle x_1, y \rangle + \overline{\beta} \langle x_2, y \rangle.$$

(ii) $\langle ., . \rangle$ est semi-symétrique : $\forall x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
(iii) $\langle ., . \rangle$ est définie positive : $\forall x \in E$, $x \neq 0 \Longrightarrow \langle x, x \rangle > 0$.
Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien. On dit aussi espace euclidien s'il est réel et espace hermitien s'il est complexe.

Remarques 1.1.2 *a) Signalons que plusieurs auteurs utilisent l'appelation euclidien, hermition lorsque la dimension de l'espace en question est finie.*

b) On note le produit scalaire de deux vecteurs x *et* y, $\langle x, y\rangle$ *ou* $(x|y)$.

c) De (i) et (ii), on obtient imméditement

(i)' $\forall x, y_1, y_2 \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \alpha\overline{\langle x, y_1\rangle} + \beta\langle x, y_2\rangle$.

d) En posant $y = x$ *dans (ii), on obtient* $\langle x, y\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ *donc* $\forall x \in E$, $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$. *L'inégalité dans (iii) a donc un sens.*

e) D'après (i), on a $\langle 0, 0\rangle = 0$, *donc la condition (iii) est équivalente à celle-ci :*

(iii)' $\forall x \in E$, $\langle x, x\rangle \geq 0$ *et* $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

f) Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *les symboles de conjugaison "−" qui apparaissent dans les conditions (i) et (ii) sont superflus. Dans ce cas, on dit que l'application* $\langle ., .\rangle$ *est bilinéaire (au lieu de sesquilinéaire) et symétrique (au lieu de semi-symétrique). Autrement dit, lorsque* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Lorsque* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *un produit scalaire est une forme hermitienne semi-symétrique définie positive.*

g) La convention (i) et (i)' est adoptée en général en physique. En mathématique, on utilise souvent la convention opposée.

Exemple 1.1.3 *Soit* $E = \mathbb{R}^n$. *Si* $x = (x_1, ..., x_n) \in E$ *et* $y = (y_1, ..., y_n) \in E$, *on définit un produit scalaire (usuel) par*

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Exemple 1.1.4 *Soit* $E = \mathbb{C}^n$. *Le produit scalaire (usuel) sur* E *est défini par*

$$\langle x, y\rangle = \overline{x}_1 y_1 + \cdots + \overline{x}_n y_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k y_k.$$

Exemple 1.1.5 *Soit* $E = C([a, b], \mathbb{R})$, *l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur* $[a, b]$. *Si* $f, g \in E$, *on peut définir un produit scalaire (voir exercice 1.1) par*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Exemple 1.1.6 *Soit* $E = M_{m,n}(\mathbb{R})$, *l'espace vectoriel des matrices à* m *lignes et* n *colonnes à éléments dans* $\mathbb{R}$. *L'expression*

$$\langle A, B\rangle = tr(B^\top A),$$

est un produit scalaire sur E. *(tr désigne la trace de la matrice carrée et* $B^\top$ *désigne la transposée de* B*).*

Exemple 1.1.7 *Soit $E = M_{m,n}(\mathbb{C})$, on peut définir un produit scalaire par*

$$\langle A, B\rangle = tr(B^*A),$$

où B^* désigne l'adjointe de B c-à-d. la transposée conjuguée de B.

Exemple 1.1.8 *Soit $l^2(\mathbb{R})$, l'ensemble des suites de nombres réels (a_k) telles que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ converge. On montre (voir exercice 3.6.2, plus loin) que*

$$\langle a, b\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k,$$

est un produit scalaire sur E.

1.2 Norme, espace vectoriel normé

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.2.1 *On appelle norme sur E, toute application*

$$\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|x\|,$$

vérifiant les conditions suivantes :
(i) $\forall x \in E$, $||x|| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
(ii) $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$.
(iii) $\forall x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité de Minkowski ou inégalité triangulaire).
Un espace vectoriel muni d'une norme est dit espace vectoriel normé.

(Minkowski, 1864 − 1909, mathématicien et physicien allemand)

Soit $\langle , \rangle$ un produit scalaire sur E. Alors l'application $x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme (associée au produit scalaire) sur E.

Proposition 1.2.2 *(inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit $\langle , \rangle$ un produit scalaire sur E. Pour tous $x, y \in E$, on a*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|.$$

(Cauchy, $1789 - 1857$, mathématicien français)

(Schwarz, $1843 - 1921$, mathématicien allemand)

Remarques 1.2.3 *a) $|\langle x, y\rangle| = \|x\|.\|y\|$ si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.*

b) Soient x et y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $-1 \leq \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|.\|y\|} \leq 1$ et par conséquent il existe un nombre réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que : $\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|.\|y\|}$. Ce nombre est appelé l'angle des vecteurs x et y. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a $\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \leq 2\|x\|.\|y\|$ et par conséquent, on peut définir l'angle $\theta \in [0, \pi]$ de x et y par $\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle}{\|x\|.\|y\|}$.

Exemple 1.2.4 *Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose*

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &= |x_1| + \cdots + |x_n|.\\
\|x\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2} \quad (\textit{norme euclidienne}).\\
\|x\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.\\
\|x\|_\infty &= max\,(|x_1|, ..., |x_n|).
\end{aligned}$$

On montre (voir exercice 1.5.4) que les applications

$$\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_p, \|x\|_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.2.5 *Pour tout nombre réel* $p \geq 1$*, on définit*

$$\|.\|_p : C([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

par

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \|f\|_\infty = max_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

On montre que les applications $\|f\|_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *sont des normes.*

Définition 1.2.6 *Deux normes* $\|.\|$ *et* $\|.\|'$ *sont dites équivalentes s'il existe deux nombres réels* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$ *tels que :* $\forall x \in E$, $\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|$.

Les trois normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$ (et sur tout espace vectoriel normé de dimension finie). Lorsque le choix de ces normes est arbitraire, on utilise tout simplement la notation $\|.\|$.

1.3 Distance, espace métrique

Définition 1.3.1 *Soit* E *un ensemble (non vide). On appelle distance sur* E *toute application*

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto d(x,y),$$

satisfaisant aux conditions suivantes :
(i) $\forall x, y \in E$, $d(x,y) \geq 0$ *et* $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
(ii) $\forall x, y \in E$, $d(x,y) = d(y,x)$.
(iii) $\forall x, y, z \in E$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(inégalité triangulaire).*
Un ensemble muni d'une distance est dit espace métrique.

Si E est un espace vectoriel normé, alors l'application $(x,y) \longmapsto \|x-y\|$ est une distance sur E.

Exemple 1.3.2 *Soit* E *un ensemble non vide et soit* $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$*, définie par* $d(x,y) = 1$ *si* $x \neq y$ *et* $= 0$ *si* $x = y$*. L'application* d *est une distance sur* E *dite distance discrète.*

Exemple 1.3.3 *Soit A un ensemble non vide quelconque et soit $E = B(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications bornées sur A. L'application d définie par*

$$\forall (f,g) \in E \times E, \quad d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in A\},$$

est une distance sur E appelée distance de la convergence uniforme sur A.

Les applications suivantes de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ sont bien des distances (exercice 1.5.8) : $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
(x,y) &\longmapsto d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|. \\
(x,y) &\longmapsto d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}. \\
(x,y) &\longmapsto d_\infty(x,y) = \max |x_i - y_i|, 1 \leq i \leq n.
\end{aligned}$$

Exemple 1.3.4 *Soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$. L'application d définie sur $E \times E$ par*

$$\forall (f,g) \in E \times E, \quad d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx,$$

est une distance sur E, dite distance de la convergence en moyenne.

Exemple 1.3.5 *Soient P et Q deux parties non vides de E. On appelle distance de P et de Q, la borne inférieure des distances des points de P et de Q :*

$$d(P,Q) = \inf_{x \in P, y \in Q} d(x,y).$$

Lorsque P est réduit à un élément x, la distance de P et de Q s'appelle distance de x à Q et se note $d(x,Q)$. Mais, l'application

$$\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad (P,Q) \longmapsto d(P,Q),$$

n'est pas une distance sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.

Remarque 1.3.6 *On dit que deux distances d et d' sont équivalentes sur E, s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que : $\forall x, y \in E$, $\alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y)$.*

Sur $\mathbb{R}^n$, les distances d_1, d_2 et d_∞ sont équivalentes. Mais sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ ces distances ne sont pas équivalentes.

1.4 Éléments de topologie (de $\mathbb{R}^n$,...)

Définition 1.4.1 *On appelle boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r \geq 0$, l'ensemble*

$$B(a,r) = \{x \in E : \|x-a\| < r\}.$$

Lorsque $\|x-a\| \leq r$, on dira que la boule est fermée et on note $\overline{B}(a,r)$.

Les boules relatives aux normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$ seront respectivement notées $B_1(a,r)$, $B_2(a,r)$, $B_\infty(a,r)$. Il faut noter que les boules ont des formes différentes selon les espaces métriques considérés (voir l'exercice 1.5.10, pour les différentes distances utilisées).

Exemple 1.4.2 *On a $B(a,0) = \emptyset$, $\overline{B}(a,0) = \{a\}$. Pour $n = 1$, les trois normes se réduisent à la valeur absolue et $B(a,r)$ est l'intervalle $]a-r, a+r[$, pour $n = 2$ et la norme euclidienne, $B(a,r)$ représente le disque de centre a et de rayon r et, pour $n = 3$ et la norme euclidienne, $B(a,r)$ est la boule usuelle de centre a et de rayon r.*

Définition 1.4.3 *On appelle voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$, tout ensemble $\mathcal{V}(a)$ qui contient une boule ouverte $B(a,r)$.*

Définition 1.4.4 *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in \mathbb{R}^n$. On dit que a est intérieur à A si A est un voisinage de a, c-à-d., s'il existe $r > 0$ tel que : $B(a,r) \subset A$. L'intérieur de A, noté int$A$ ou $\overset{\circ}{A}$, est l'ensemble*

$$intA = \{a \in \mathbb{R}^n : a \text{ est intérieur à } A\} = \{a \in \mathbb{R}^n : A \text{ est voisinage de } a\}.$$

On a $\mathrm{int}A \subset A$ et $\mathrm{int}[a,b] = \mathrm{int}]a,b[= \mathrm{int}]a,b] = \mathrm{int}[a,b[=]a,b[$.

Proposition 1.4.5 *Soient A_1 et A_2 deux parties de $\mathbb{R}^n$. Alors*

$$A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow int\ A_1 \subseteq intA_2,$$

$$intA_1 \cup intA_2 \subseteq int(A_1 \cup A_2),$$

$$intA_1 \cap intA_2 = int(A_1 \cap A_2).$$

Définition 1.4.6 *On dit qu'un point $a \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à A si tout voisinage de a coupe A. Cela revient à dire que : $\forall r > 0$, $B(a,r) \cap A \neq \emptyset$. L'adhérence (ou la fermeture) de A, notée adh$A$ ou $\overline{A}$, est l'ensemble*

$$adhA = \{a \in \mathbb{R}^n : a \text{ est adhérent à } A\}.$$

On a adh$A \supset A$ et adh$[a,b] = $ adh$]a,b[= $ adh$]a,b] = $ adh$[a,b[= [a,b]$. Lorsque adh$A = \mathbb{R}^n$, on dira que A est dense dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.4.7 *Soient A_1 et A_2 deux parties de $\mathbb{R}^n$. Alors*

$$A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow adhA_1 \subseteq adh\ A_2,$$

$$adhA_1 \cup adhA_2 = adh(A_1 \cup A_2),$$

$$adhA_1 \cap adhA_2 \supseteq adh(A_1 \cap A_2).$$

Exemple 1.4.8 *adh $\mathbb{Q}^n = \mathbb{R}^n$.*

Définition 1.4.9 *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On dit qu'un point $a \in \mathbb{R}^n$ est un point d'accumulation de A si tout voisinage de a contient un point de A autre que a (autrement dit si $a \in adh(A \backslash \{a\})$). Le point a est dit isolé s'il existe un voisinage de a ne contenant aucun point de A autre que a.*

Remarque 1.4.10 *Un point isolé de A est un point de A qui n'est pas un point d'accumulation de A. Si $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points d'accumulation de A et $\mathcal{I}$ celui des points isolés de A, alors $\mathcal{I} \subset A \subset adh\ A$, $\mathcal{I} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ et $\mathcal{I} \cup \mathcal{C} = adh\ A$.*

Définition 1.4.11 *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On dit que A est ouvert si $A = \emptyset$ ou*

$$\forall a \in A, \exists r > 0 : B(a,r) \subset A.$$

Autrement dit, A est ouvert si int $A = A$.

Exemple 1.4.12 *$\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts.*

Proposition 1.4.13 *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert et une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Proposition 1.4.14 *L'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.*

Remarque 1.4.15 *L'intérieur de A est la réunion de tous les ouverts contenus dans A.*

Définition 1.4.16 *On dit que A est fermé si adh$A = A$. Autrement dit, A est fermé si son complémentaire est un ouvert.*

Exemple 1.4.17 *$\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sont des fermés.*