Chapitre 1

Généralités

1.1 Formes différentielles de degré 1

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et son dual $(\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (que l'on note également $\Lambda^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ou tout simplement $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$). Ce dernier étant l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. On note $(dx_1, ..., dx_n)$ la base duale de la base canonique $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, $dx_1, ..., dx_n$ sont n formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ définies par

$$dx_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Définition 1.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle forme différentielle de degré 1 ou 1-forme différentielle sur U, l'application définie par*

$$\omega : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad x \longmapsto \omega(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) dx_i,$$

où f_i sont des applications de U dans $\mathbb{R}$. Si $f_i \in \mathcal{C}^p$, $(0 \leq p \leq +\infty)$, on dit alors que ω est de classe $\mathcal{C}^p$.

Notation : On désigne parfois une 1-forme différentielle par $\omega = \omega_f^1$ où $f = (f_i)$.

Exemple 1.2 *Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et*

$$\omega(x) = x_1 dx_1 - x_2^2 dx_2 - (1 + x_3) dx_3,$$

une 1-forme différentielle sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} \omega(x)(e_1) &= x_1 dx_1(e_1) - x_2^2 dx_2(e_1) - (1 + x_3) dx_3(e_1) = x_1, \\ \omega(x)(e_2) &= -x_2^2, \\ \omega(x)(e_3) &= 1 + x_3. \end{aligned}$$

Remarque 1.3 *Soit*

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, ..., x_n) \longmapsto f(x_1, ..., x_n),$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^p$. La différentielle

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^{p-1}$. Par ailleurs, il existe des formes différentielles qui ne sont pas la différentielle d'une fonction. En effet, considérons par exemple la forme

$$\omega = x_2 dx_1,$$

et supposons qu'elle soit la différentielle d'une fonction $f(x_1, x_2)$. On aurait donc

$$\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = x_2 dx_1.$$

On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2$ (donc f dépend de x_2) et $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ (donc f ne dépend pas de x_2), ce qui est absurde.

1.2 Formes différentielles de degré 2

Considérons l'espace $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ (que l'on note également $\Lambda^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$) des applications

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (y, z) \longmapsto \varphi(y, z),$$

bilinéaires et antisymétriques (ou alternées). Rappelons que :

a) φ est bilinéaire si $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall y, z, u \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(\alpha y + \beta z, u) = \alpha \varphi(y, u) + \beta \varphi(z, u),$$

$$\varphi(y, \alpha z + \beta u) = \alpha \varphi(y, z) + \beta \varphi(y, u).$$

b) φ est antisymétrique si $\forall y, z \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(y, z) = -\varphi(z, y).$$

Proposition 1.4 $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ *est un espace vectoriel de dimension* $\frac{n(n-1)}{2}$ *et une base est déterminée par la famille des fonctions bilinéaires antisymétriques* $(dx_i \wedge dx_j)_{1 \leq i < j \leq n}$ *où*

$$dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (y, z) \longmapsto \det \begin{pmatrix} y_i & z_i \\ y_j & z_j \end{pmatrix} = y_i z_j - y_j z_i.$$

Démonstration : Montrons que si

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}dx_i \wedge dx_j = 0,$$

alors $a_{ij} = 0$, $\forall i, j$. Soient e_r, e_s, $(r < s)$, deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a

$$0 = \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}dx_i \wedge dx_j(e_r, e_s) = \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} \det \begin{pmatrix} \delta_{ri} & \delta_{si} \\ \delta_{rj} & \delta_{sj} \end{pmatrix} = a_{rs},$$

où, $\delta_{ri} = 1$ si $r = i$ et $\delta_{ri} = 0$ si $r \neq i$. Dès lors, $(dx_i \wedge dx_j)_{1\leq i<j\leq n}$ sont linéairement indépendants. Montrons maintenant que $(dx_i \wedge dx_j)_{1\leq i<j\leq n}$ engendrent $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$. Soit $\varphi \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$. Comme φ est bilinéaire, alors

$$\begin{aligned}
\varphi(y,z) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i, \sum_{j=1}^n z_j e_j\right),\\
&= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}}^n \varphi(e_i,e_j)y_i z_j,\\
&= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i<j}}^n \varphi(e_i,e_j)y_i z_j + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i>j}}^n \varphi(e_i,e_j)y_i z_j, \quad (\text{car } \varphi(e_i,e_i)=0),\\
&= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i<j}}^n \varphi(e_i,e_j)y_i z_j + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ j>i}}^n \varphi(e_j,e_i)y_j z_i,\\
&= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i<j}}^n \varphi(e_i,e_j)y_i z_j - \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i<j}}^n \varphi(e_i,e_j)y_j z_i, (\varphi \text{ est antisymétrique}),\\
&= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i<j}}^n \varphi(e_i,e_j)(y_i z_j - y_j z_i),\\
&= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i<j}}^n \varphi(e_i,e_j)\det\begin{pmatrix} y_i & z_i\\ y_j & z_j\end{pmatrix},\\
&= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i<j}}^n \varphi(e_i,e_j)dx_i\wedge dx_j(y,z),
\end{aligned}$$

et le résultat en découle. □

On en déduit que :

$$\begin{aligned} dx_i \wedge dx_j &= -dx_j \wedge dx_i, \\ dx_i \wedge dx_i &= 0. \end{aligned}$$

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et

$$f_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_{ij}(x), 1 \leq i < j \leq n$$

des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, $0 \leq p \leq +\infty$. Une fonction à valeurs dans l'espace $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ est dite de classe $\mathcal{C}^p$, si ses coordonnées dans la base $(dx_i \wedge dx_j)_{1 \leq i < j \leq n}$ sont de classe $\mathcal{C}^p$. Le choix de cette base dans $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ détermine un isomorphisme de cet espace avec $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Définition 1.5 *On appelle forme différentielle de degré* 2 *ou* 2*-forme différentielle sur* U*, l'application décrite par*

$$\omega : U \longrightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^n), \quad x \longmapsto \omega(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j.$$

Si $f_{ij} \in \mathcal{C}^p$*, (*$0 \leq p \leq +\infty$*), on dit alors que* ω *est de classe* $\mathcal{C}^p$*.*

Notation : On désigne parfois une 2-forme différentielle par $\omega = \omega_f^2$ où $f = (f_{ij})$.

Exemple 1.6 *Soient* (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et*

$$\omega(x) = dx_2 \wedge dx_3 - x_2^2 dx_3 \wedge dx_1 - dx_1 \wedge dx_2,$$

une 2*-forme différentielle sur* $U \subset \mathbb{R}^3$*. Déterminons* $\omega(x)(e_1, e_2 + 2e_3)$*. On a*

$$\begin{pmatrix} & e_1 & e_2 + 2e_3 \\ dx_1 & 1 & 0 \\ dx_2 & 0 & 1 \\ dx_3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$dx_2 \wedge dx_3(e_1, e_2 + 2e_3) = dx_2 \wedge dx_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$dx_3 \wedge dx_1(e_1, e_2 + 2e_3) = dx_2 \wedge dx_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2,$$

$$dx_1 \wedge dx_2(e_1, e_2 + 2e_3) = dx_2 \wedge dx_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Par conséquent, on a

$$\omega(x)(e_1, e_2 + 2e_3) = 2x_2^2 - 1.$$

1.3 Formes différentielles de degré k

Considérons l'espace $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ (que l'on note également $\Lambda^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$) des applications

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (y_1, y_2, ..., y_k) \longmapsto \varphi(y_1, y_2, ..., y_k),$$

k-linéaires et antisymétriques. Rappelons que :

a) φ est k-linéaire si $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall i (1 \leq i \leq k)$, $\forall y_1, ..., y_k, z_i \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(y_1, ..., \alpha y_i + \beta z_i, ..., y_k) = \alpha \varphi(y_1, ..., y_i, ..., y_k) + \beta \varphi(y_1, ..., z_i, ..., y_k).$$

b) φ est antisymétrique si $\forall y_1, ..., y_k \in \mathbb{R}^n$, $\forall i, j (1 \leq i, j \leq k, i \neq j)$, on a

$$\varphi(y_1, ..., y_i, ..., y_j, ..., y_k) = -\varphi(y_1, ..., y_j, ..., y_i, ..., y_k).$$

Par convention, $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) = 0$ si $k > n$.

Proposition 1.7 $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ *est un espace vectoriel de dimension :*

$$\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

La famille $(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n}$ *des fonctions bilinéaires antisymétriques,*

$$dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(y_1, y_2, ..., y_k) \longmapsto \det \begin{pmatrix} y_{1i_1} & y_{1i_2} & \cdots & y_{1i_k} \\ y_{2i_1} & y_{2i_2} & \cdots & y_{2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{ki_1} & y_{ki_2} & \cdots & y_{ki_k} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i_1, ..., i_k \leq n$$

forme une base de cet espace.

Démonstration : voir exercice 13.5.

On déduit des propriétés des déterminants que :

$$dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_r} \wedge ... \wedge dx_{i_s} \wedge dx_{i_k} = -dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_s} \wedge ... \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{i_k},$$

et en particulier si $i_r = i_s$, alors

$$dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_r} \wedge ... \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{i_k} = 0.$$

Pour $k > n$, on a $dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} = 0$.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et

$$f_{i_1,\dots,i_k} : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_{i_1,\dots,i_k}(x), 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, $0 \leq p \leq +\infty$. Une fonction à valeurs dans $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ est dite de classe $\mathcal{C}^p$, si ses coordonnées dans la base

$$(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n},$$

sont de classe $\mathcal{C}^p$. Le choix de cette base détermine un isomorphisme :

$$\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^{\frac{n!}{k!(n-k)!}}.$$

Définition 1.8 *On appelle forme différentielle de degré k ou k-forme différentielle sur U, l'application décrite par*

$$\omega : U \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n), \quad x \longmapsto \omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1,\dots,i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Si $f_{i_1,\dots,i_k} \in \mathcal{C}^p$, ($0 \leq p \leq +\infty$), on dit alors que ω est de classe $\mathcal{C}^p$.

Notation : On désigne parfois une k-forme différentielle par $\omega = \omega_f^k$ où $f = (f_{i_1,\dots,i_k})$.

Pour $k = 0$, on convient qu'une 0-forme dans U est simplement une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$. On utilisera parfois la notation ω_f^0.

Soient ω et λ deux k-formes différentielles sur U. La somme $\omega + \lambda$ est une k-forme différentielle sur U définie par

$$\omega + \lambda : U \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n), \quad x \longmapsto \omega(x) + \lambda(x).$$

De même, on définit la multiplication d'une k-forme différentielle ω sur U par une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f\omega : U \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n), \quad x \longmapsto f(x)\omega(x),$$

c'est une k-forme différentielle sur U. On désigne par $\Omega^k(U)$, l'ensemble des k-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^p$ ($0 \leq p \leq +\infty$) sur U. C'est l'ensemble $\mathcal{C}^p\left(U, \Lambda^k(\mathbb{R}^n)\right)$. On a vu ci-dessus que $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel de dimension finie $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. En tenant compte des propriétés des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, on obtient le résultat suivant :

Proposition 1.9 *Les k-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^p$ ($0 \leq p \leq +\infty$) sur U, forment un espace vectoriel noté $\Omega^k(U)$.*

Remarque 1.10 *Nous avons considéré l'espace $\Lambda^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (que nous avons simplement noté $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ mais on pourra considérer l'espace $\Lambda^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Autrement dit, on considère l'espace $\Lambda^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ et la k-forme différentielle ω sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ sera dite réelle si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

Chapitre 2

Produit extérieur

Lors de l'étude des formes différentielles, on utilise plusieurs opérations parmi lesquelles le produit extérieur. On montre que ce produit est associatif, distributif mais anticommutatif et nous verrons ses liaisons avec le produit scalaire, le produit vectoriel et le produit mixte.

2.1 Définition et propriétés

Soient

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

une k-forme différentielle et

$$\lambda = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq n} g_{j_1,\ldots,j_l} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l},$$

une l-forme différentielle.

Définition 2.1 *Le produit extérieur de ω et λ est la $(k+l)$-forme différentielle dans U définie par*

$$\omega \wedge \lambda = \sum_{1 \leq i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l \leq n} f_{i_1,\ldots,i_k} g_{j_1,\ldots,j_l} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}.$$

Remarque 2.2 *Notons que si $k + l > n$, alors $\omega \wedge \lambda = 0$.*

Proposition 2.3 *Le produit extérieur est associatif :*

$$(\omega \wedge \lambda) \wedge \eta = \omega \wedge (\lambda \wedge \eta).$$

Démonstration. Evidente. □

Proposition 2.4 *Le produit extérieur est distributif par rapport à l'addition :*

$$(\omega + \eta) \wedge \lambda = (\omega \wedge \lambda) + (\eta \wedge \lambda).$$

Démonstration. La preuve résulte du fait que tout terme dans la formule $\omega \wedge \lambda$ (définition ci-dessus) est linéaire en ω et λ. □

Proposition 2.5 *Le produit extérieur est anticommutatif :*

$$\omega \wedge \lambda = (-1)^{kl}(\lambda \wedge \omega).$$

Démonstration. Par définition, on a

$$\omega \wedge \lambda = \sum_{1 \leq i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l \leq n} f_{i_1,\dots,i_k} g_{j_1,\dots,j_l} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}.$$

Dès lors, cette expression est égale à

$$\sum_{1 \leq i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l \leq n} f_{i_1,\dots,i_k} g_{j_1,\dots,j_l} (-1)^k dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_l},$$

ou encore à

$$\sum_{1 \leq i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l \leq n} f_{i_1,\dots,i_k} g_{j_1,\dots,j_l} (-1)^{kl} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

et finalement à,

$$(-1)^{kl} \sum_{1 \leq i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l \leq n} g_{j_1,\dots,j_l} f_{i_1,\dots,i_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

et le résultat en découle. □

2.2 Exemples

Exemple 2.6 *Le produit extérieur des* 1*-formes différentielles dans* $U \subset \mathbb{R}^3$*,*

$$\omega = \sum_{i=1}^{3} f_i dx_i, \qquad \lambda = \sum_{j=1}^{3} g_j dx_j,$$

s'écrit

$$\begin{aligned} \omega \wedge \lambda &= \sum_{1 \leq i,j \leq 3}^{3} f_i g_j dx_i \wedge dx_j, \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq 3 \\ i \neq j}}^{3} f_i g_j dx_i \wedge dx_j, \end{aligned}$$