# Chapitre 1

# Fonctions gamma et bêta d'Euler

## 1.1 Fonction gamma d'Euler

La fonction gamma d'Euler $\Gamma(z)$, se définit par l'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{Re } z > 0 \tag{1.1}$$

où

$$t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}, \quad t \in ]0, +\infty[.$$

Il existe plusieurs manières d'introduire la fonction $\Gamma$ d'Euler et celle-ci possède de nombreuses propriétés remarquables.

**Proposition 1.1** *La fonction $\Gamma(z)$ est holomorphe pour Re $z > 0$. En outre, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$ où Re $z > 0$, l'expression*

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^n t^{z-1} dt.$$

*Démonstration* : En effet, la fonction

$$z \longmapsto e^{-t} t^{z-1} = e^{(z-1)\log t - t},$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ pour $t > 0$. L'intégrale ci-dessus converge uniformément dans le domaine $0 < \delta_1 \leq \text{Re } z \leq \delta_2 < \infty$ car

$$\left|e^{-t} t^{z-1}\right| \leq \begin{cases} t^{\delta_1 - 1} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ e^{-t} t^{\delta_2 - 1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

et les intégrales $\int_0^1 t^{\delta_1 - 1}dt$, $\int_1^{\infty} e^{-t}t^{\delta_2 - 1}dt$ convergent. Par conséquent, la fonction $\Gamma$ est holomorphe dans le demi-plan Re $z > 0$. En outre, on peut dériver sous le signe intégrale, et on obtient

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)^n t^{z-1}dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \text{Re } z > 0$$

ce qui achève la démonstration. ■

**Proposition 1.2** *La fonction $\Gamma(z)$ vérifie la relation fonctionnelle suivante :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \ \textit{Re } z > 0, \tag{1.2}$$

*ce qui implique, par récurrence, la relation :*

$$\Gamma(n+1) = n!, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

*Démonstration* : En effet, en intégrant par parties, on obtient,

$$\int_v^u e^{-t}t^{z-1}dt = \frac{e^{-u}u^z}{z} - \frac{e^{-v}v^z}{z} + \frac{1}{z}\int_v^u e^{-t}t^z dt, \quad \text{Re } z > 0$$

d'où

$$\Gamma(z) = \lim_{\substack{u \to +\infty \\ v \to 0}} \int_v^u e^{-t}t^{z-1}dt = \frac{1}{z}\Gamma(z+1).$$

Comme

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1,$$

alors $\Gamma(2) = 1!$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(1) = 2!$, $\Gamma(4) = 3\Gamma(2) = 3!$ et par une récurrence immédiate, on obtient la formule en question. ■

**Proposition 1.3** *On peut prolonger la fonction $\Gamma(z)$ au moyen de la formule (1.2), en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{-\mathbb{N}\}$.*

*Démonstration* : En effet, on sait que $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$ converge pour Re $z > 0$. Si Re $z \in ]-1, 0[$, l'intégrale $\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt$ converge et la formule $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$, nous permet de définir $\Gamma(z)$

pour Re $z \in ]-1,0[$. On peut, de proche en proche, définir $\Gamma(z)$ pour Re $z \in ]-(n+1),-n[$, $n \in \mathbb{N}$. Plus précisément, on a

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(z+2) = (z+1)z\Gamma(z),$$

et ainsi de suite

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)...z\Gamma(z), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dès lors

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)...(z+n)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

La fonction $\Gamma(z)$ se définit par la formule (1.2) pour Re $z > 0$ et par la formule ci-dessus pour $-(n+1) <$ Re $z < -n$, $n \in \mathbb{N}$. ■

**Proposition 1.4** *Pour Re $z > 0$, on a*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt.$$

*Démonstration* : On a

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leq e^{n\left(-\frac{t}{n}\right)} = e^{-t},$$

et

$$\left|\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}.\mathbf{1}_{[0\leq t\leq n]}\right| \leq e^{-t}t^{Re\ z-1},$$

où $\mathbf{1}_{[0\leq t\leq n]}$ désigne la fonction caractéristique de $[0,n]$. Comme l'intégrale $\int_0^\infty e^{-t}t^{Re\ z-1}dt$, *Re* $z > 0$, est convergente, alors d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(\left(1 + \frac{t}{-n}\right)^{\frac{-n}{t}}\right)^{-t} t^{z-1}dt = \Gamma(z),$$

et la démonstration s'achève. ■

**Proposition 1.5** *On a*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z.n!}{n(z+1)...(z+n)}, \quad Re\ z > 0$$

*Démonstration* : En faisant plusieurs intégrations par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt &= n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau, \quad \tau = \frac{t}{\tau} \\
&= n^z \frac{n}{z} \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^z d\tau, \\
&= n^z \frac{n(n-1)}{z(z+1)} \int_0^1 (1-\tau)^{n-2} \tau^{z+1} d\tau, \\
&\vdots \\
&= n^z \frac{n(n-1)...1}{z(z+1)...(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau, \\
&= n^z \frac{n.n!}{z(z+1)...(z+n)},
\end{aligned}$$

et le résultat en découle. ■

**Proposition 1.6** *On a pour Re $z > 0$, la formule de Weierstrass :*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}, \quad Re\ z > 0$$

*où*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right) = 0,57721...,$$

*est la constante d'Euler.*

*Démonstration* : D'après la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt &= \frac{n^z.1.2.3...n}{z(z+1)(2+z)(3+z)...(n+z)}, \\
&= \frac{n^z}{\frac{z(z+1)(2+z)(3+z)...(n+z)}{1.2.3...n}}, \\
&= \frac{n^z}{z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)...\left(1+\frac{z}{n}\right)}, \\
&= \frac{e^{z\ln n}}{z\prod_{l=1}^n \left(1+\frac{z}{l}\right)}, \\
&= \frac{e^{z\left(\ln n - \sum_{l=1}^n \frac{1}{l}\right)}}{z\prod_{l=1}^n \left(1+\frac{z}{l}\right) e^{-z\sum_{l=1}^n \frac{1}{l}}}.
\end{aligned}$$

Or
$$e^{-z\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}=e^{-z\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}=\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{z}{k}},$$
donc
$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt=\frac{e^{z\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}}{z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}}.$$
En tenant compte de la proposition 1.4, on obtient
$$\Gamma(z)=\frac{e^{z\lim_{n\to+\infty}\left(\ln k-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}}{z\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}}=\frac{e^{-\gamma z}}{z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}},$$
où $\gamma$ est la constante d'Euler. ■

**Exercice 1.1** *Montrer que :* $\gamma=-\Gamma'(1)$.

✠ *Solution* : Une dérivation logarithmique de la formule de Weierstrass ci-dessus, fournit
$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{1}{z}+\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+z}-\frac{1}{k}\right).$$
Comme
$$\left|\frac{1}{k+z}-\frac{1}{k}\right|\leq\frac{C}{k^2},\quad k\in\mathbb{N}^*,$$
($C$ étant une constante dépendant de $z$) et que la série $\sum\frac{C}{k^2}$ converge, on en déduit que la série ci-dessus converge absolument et converge uniformément (avec $|k+z|\geq\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$). En posant $z=1$, on note que :
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+z}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n+1}-1\longrightarrow-1,$$
lorsque $n\longrightarrow\infty$ et le résultat en découle.

**Proposition 1.7** *Pour tout* $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, *on a la formule des compléments :*
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},\ \forall z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}.$$

*Démonstration* : D'après la proposition 1.5, on a

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} g_n(z), \quad \text{Re } z > 0$$

où

$$g_n(z) = \frac{n(z+1)...(z+n)}{n!} n^{-z}.$$

Comme

$$g_n(1-z) = \frac{1}{n!}(1-z)(2-z)...(n+1-z)n^{z-1},$$

alors

$$\begin{aligned} g_n(z)g_n(1-z) &= z(1-z^2)\left(\frac{4-z^2}{2^2}\right)...\left(\frac{n^2-z^2}{n^2}\right)\left(\frac{n+1-z}{n}\right), \\ &= \frac{n+1-z}{n} z \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right). \end{aligned}$$

Nous avons prouvé dans l'exemple 18.120, la formule

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right),$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} g_n(z)g_n(1-z) = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

Et comme (proposition 1.5),

$$\lim_{n\to\infty} g_n(z)g_n(1-z) = \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)},$$

alors le résultat en découle. ■

Pour d'autres propriétés de la fonction $\Gamma$ sur le champ réel ainsi qu'une représentation graphique de cette fonction, voir l'exercice suivant :

**Exercice 1.2** *On se propose dans cet exercice de considérer la fonction* $\Gamma(z)$ *dans le champ réel (c.-à-d., pour* $z = x \in \mathbb{R}$*), de prouver quelques propriétés et esquisser une représentation graphique de cette fonction.*

*a) Montrer que* $\Gamma$ *est convexe.*

*b) Montrer que* $\Gamma'$ *s'annule une et une seule fois en un point* $\alpha \in ]1,2[$.

*c) Montrer que :*

$$\lim_{x\to 0^+} x\Gamma(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = \lim_{x\to +\infty} \Gamma(x) = +\infty.$$

*d) Calculer* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\Gamma(x)}{x}$ *et interpréter le résultat obtenu.*
*e) Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}.$$

*f) Esquisser une représentation graphique de la fonction* $\Gamma(x)$.

✠ *Solution* : a) En effet, d'après ce qui précède, on a sur $]0,+\infty[$,

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)^2 t^{x-1} dt.$$

Cette fonction est strictement positive sur $]0,+\infty[$, donc $\Gamma$ est convexe.

b) La fonction $\Gamma$ est continue sur $[1,2]$, dérivable sur $]1,2[$ et comme $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, alors d'après le théorème de Rolle, $\exists \alpha \in ]1,2[$ tel que : $\Gamma'(\alpha) = 0$. Comme la fonction $\Gamma'$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc elle s'annule au plus une fois. Cette fonction est $< 0$ sur $]0,\alpha[$ et $> 0$ sur $]\alpha,+\infty[$. Dès lors, il existe un point unique $\alpha \in ]1,2[$ tel que : $\Gamma'(\alpha) = 0$. La fonction $\Gamma$ est strictement décroissante sur $]0,\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha,+\infty[$, donc $\Gamma$ passe par un minimum situé entre 1 et 2.

c) On sait d'après ce qui précède que la fonction $\Gamma$ est continue sur $]0,+\infty[$. En outre, on sait aussi que : $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} x\Gamma(x) = \lim_{x\to 0^+} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1.$$

La fonction $\Gamma$ est positive et au voisinage de 0, la fonction $e^{-t}t^{-1}$ n'est pas intégrable, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$. La fonction $\Gamma$ est continue et convexe. Elle croît rapidement quand $x \to +\infty$ car

$$\Gamma(k+1) = k! \sim k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}, \text{ (formule de Stirling)}.$$

Donc $\Gamma$ est croissante sur $[2,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

d) Pour $x > 1$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)\Gamma(x-1)}{x} = +\infty.$$

La courbe représentative de la fonction $\Gamma$ possède en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe $0y$.

e) On a

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} y^{2x-1} dy, \quad t = y^2$$

En particulier,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

Par application répétée de la formule de récurrence : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right), \\ &\vdots \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)...3.2.1}{(2n)(2n-2)...2.2^n} \sqrt{\pi}, \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

On montre de même que :

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n)!} \sqrt{\pi}.$$

f) Nous avons montré que l'on peut définir la fonction $\Gamma(x)$ pour $x > 0$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$, et par la formule

$$\Gamma(x+n+1) = (x+n)(x+n-1)...x\Gamma(x),$$