Chapitre 1

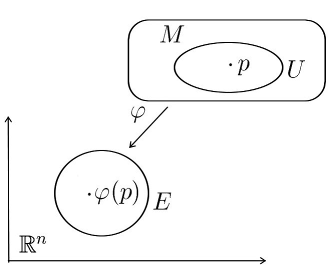
Variétés différentiables et analytiques réelles

Nous allons présenter dans ce chapitre les rudiments de la théorie des variétés différentiables et analytiques réelles en les illustrant par de nombreux exemples et applications. Plusieurs exercices et problèmes fondamentaux sont étudiés afin d'élucider les spécificités de ces variétés.

1.1 Variétés topologiques

Une variété topologique de dimension n, est un espace topologique dont tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit,

$$\begin{aligned}
&M \text{ variété topologique de dimension } n \\
&\qquad \Longleftrightarrow M \text{ espace topologique tel que } : \forall p \in M, \\
&\qquad\qquad \left\{ \begin{array}{l} \exists U \text{ voisinage ouvert de } p \\ \exists E \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \\ \exists \varphi : U \longrightarrow E, \text{ homéomorphisme} \\ \qquad \text{c.-à-d., } \varphi \text{ bijective continue et } \varphi^{-1} \text{ continue.} \end{array} \right.
\end{aligned}$$



1.2 Cartes et coordonnées locales

Le couple (U, φ) est appelé une carte et U le domaine de la carte.

Si p est un point de U, alors $\varphi(U)$ est un point de $\mathbb{R}^n$. Désignons la ième coordonnée de $\varphi(p)$ par $x_i(p)$. Dès lors, on a

$$\varphi(p) = (x_1(p), ..., x_n(p)).$$

On obtient ainsi n fonctions $x_1, ..., x_n$ de U dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 &: p \longmapsto x_1(p), \\ &\vdots \\ x_n &: p \longmapsto x_n(p), \end{aligned}$$

appelées coordonnées locales. On écrit $(U, \varphi) = (U, x_1, ..., x_n)$ car les coordonnées ci-dessus définissent l'application φ de façon unique et cette application est appelée application de coordonnées.

1.3 Changement de cartes

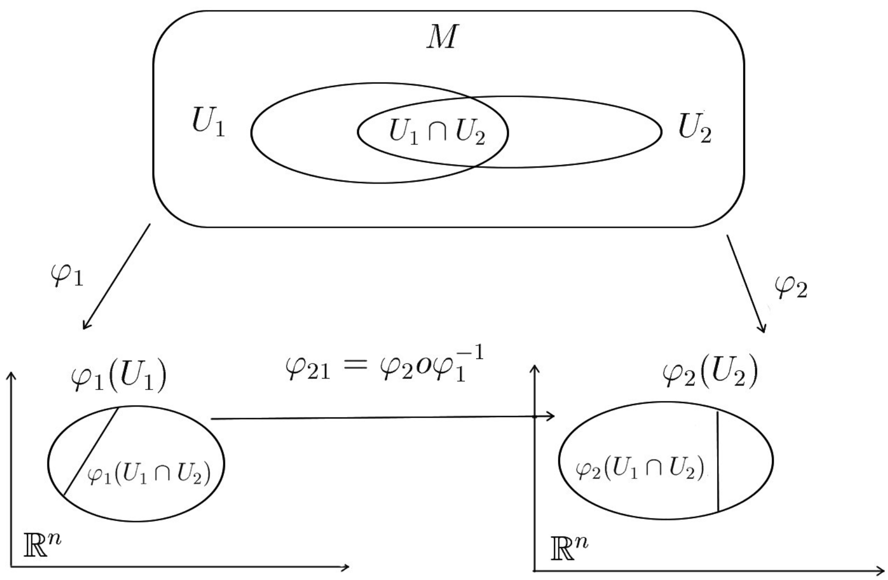
Considérons deux cartes

$$(U_1, \varphi_1) = (U_1, x_1, ..., x_n),$$

et

$$(U_2, \varphi_2) = (U_2, y_1, ..., y_n),$$

sur une variété M de dimension n et supposons que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.



Comme l'application inverse φ_1^{-1} de $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ sur $U_1 \cap U_2$ et l'application φ_2 de $U_1 \cap U_2$ sur $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$ sont des homéomorphismes, alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi_{21} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) &\longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2), \\ u &\longmapsto \varphi_{21}(u) = \varphi_2 o \varphi_1^{-1}(u), \end{aligned} \tag{1.1}$$

est un homéomorphisme (composé de deux homéomorphismes φ_2 et φ_1^{-1}). On passe d'une carte à l'autre par le biais de cette application.

Soient $(u_1, ..., u_n)$ et $\left(\varphi_{21}^1(u_1, ..., u_n), ..., \varphi_{21}^n(u_1, ..., u_n)\right)$ les coordonnées du point u et de $\varphi_{21}(u)$, respectivement. Donc $\varphi_{21}^i(u_1, ..., u_n)$ est une fonction continue de n variables.

Soit $p \in U_1 \cap U_2$, donc

$$(x_1(p), ..., x_n(p)) = \varphi_1(p),$$

et

$$(y_1(p), ..., y_n(p)) = \varphi_2(p),$$

et comme $\varphi_1(p) \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$, posons $u = \varphi_1(p)$ dans (1.1), d'où

$$\varphi_{21}(\varphi_1(p)) = \varphi_2(p),$$

c.-à-d.,

$$\left(\varphi_{21}^1(x_1(p), ..., x_n(p)), ..., \varphi_{21}^n(x_1(p), ..., x_n(p))\right) = (y_1(p), ..., y_n(p)).$$

D'où

$$y_i(p) = \varphi_{21}^i(x_1(p), ..., x_n(p)), \quad 1 \leq i \leq n \tag{1.2}$$

Les fonctions φ_{21}^i, $1 \leq i \leq n$, s'appellent changements de cartes ou fonctions de passage (sur $U_1 \cap U_2$) des coordonnées $x_1, ..., x_n$ aux coordonnées $y_1, ..., y_n$. Les formules (1.2) s'appellent formules de changement de cartes ou formules de passage.

Remarques 1.1 *a) Parfois on utilise d'autres notations. Si f est une fonction sur $\varphi(U)$, alors $f(x_1, ..., x_n)$ désigne la fonction*

$$f o \varphi : p \longmapsto f(x_1(p), ..., x_n(p)),$$

sur U. La formule

$$y = f(x_1, ..., x_n),$$

exprime que y n'est qu'une autre notation de la fonction $f(x_1, ..., x_n)$. Pour réduire le nombre de lettres utilisées, on désigne parfois f par y et on écrira donc

$$y = y(x_1, ..., x_n).$$

Signalons que dans cette formule la lettre y du premier et du second membre désigne des fonctions différentes. Au premier, c'est une fonction sur U, au second, une fonction sur $\varphi(U)$ servant à exprimer une fonction sur U au moyen de $x_1, ..., x_n$. Quand on aura à faire une distinction entre ces fonctions, on désignera la première d'entre elles par $yo\varphi$.

b) Si U_1 et U_2 sont deux domaines quelconques d'une variété M de dimension n et si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, alors $U_1 \cap U_2$ est aussi un domaine. Si U_1 est muni d'un système de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$ et U_2 est muni d'un système de coordonnées locales $(y_1, ..., y_n)$, alors $U_1 \cap U_2$ se trouve muni de deux systèmes de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n)$. On demande que chacun des systèmes se laisse exprimer l'un en fonction de l'autre :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_i = x_i(y_1, ..., y_n), & 1 \leq i \leq n \\ y_j = y_j(x_1, ..., x_n), & 1 \leq j \leq n \end{array} \right. \tag{1.3}$$

Le jacobien

$$J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n},$$

sera alors non nul. Les fonctions (1.3) sont les fonctions de passage des coordonnées $x_1, ..., x_n$ aux coordonnées $y_1, ..., y_n$ et inversement.

Lorsque le jacobien J est positif, on dira que la variété M est orientée ou orientable.

1.4 Cartes compatibles

Deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) sont dites compatibles si ou bien U_1 et U_2 sont disjoints (c.-à-d., $U_1 \cap U_2 = \emptyset$), ou bien les applications (définies si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$),

$$\varphi_{21} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2), \quad u \longmapsto \varphi_{21}(u) = \varphi_2 o \varphi_1^{-1}(u),$$

et

$$\varphi_{12} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2), \quad u \longmapsto \varphi_{12}(u) = \varphi_1 o \varphi_2^{-1}(u),$$

sont des difféomorphismes (rappelons qu'un difféomorphisme est une bijection différentiable dont la réciproque est aussi différentiable. On montre qu'une application différentiable dont le jacobien est non nul est un difféomorphisme).

Notons que si (U, φ) est une carte de la variété M et si V est un ouvert de $\varphi(U)$, alors $\varphi^{-1}(V)$ est un ouvert de M et $(\varphi^{-1}(V), \varphi)$ est une carte de M. En outre, ces cartes sont compatibles.

1.5 Variétés différentiables, analytiques et atlas

La variété M est dite

- différentiable (ou différentielle) de classe $\mathcal{C}^r$ $(1 \leq r \leq \infty)$ si φ_{21} et φ_{12} sont des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^r$.(Notons que si $r = 0$, c.-à-d., φ_{21} et φ_{12} sont des homéomorphismes, on obtient la définition de variété topologique).

- analytique si φ_{21} et φ_{12} sont analytiques.

On appelle atlas de M, un ensemble de cartes (U_i, φ_i) de M qui sont deux à deux compatibles et dont les domaines U_i recouvrent toute la variété M (autrement dit, pour tout $p \in M$, il existe au moins un indice i tel que : $p \in U_i$). La relation de compatibilité introduite ci-dessus est une relation d'équivalence pour les atlas. Deux atlas sont équivalents si leur union est un atlas. Une structure différentiable sur M est une classe d'équivalence d'atlas.

Dans la suite, on supposera qu'une variété est séparée et possède une base dénombrable d'ensembles ouverts. (M est séparée si deux points quelconques possèdent deux voisinages disjoints. Une famille $\mathcal{B}$ d'ouverts est une base de M, si tout ouvert de M peut être représenté comme une réunion d'ensembles de $\mathcal{B}$). Dès lors, une variété différentiable est un espace topologique séparé et à base dénombrable muni d'une structure différentiable.

Remarques 1.2 *Nous avons supposé qu'une variété est séparée et possède une base dénombrable d'ensembles ouverts. Ces conditions permettent d'écarter certains espaces pathologiques. Signalons que certains auteurs définissent les variétés sans imposer ces conditions.*

a) Comme exemple de variété non séparée, on considère l'espace

$$M = \mathbb{R}^* \cup \{a, b\}, \quad (a, b \notin \mathbb{R}^*),$$

et les applications

$$\varphi_1 : U_1 = \mathbb{R}^* \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \varphi_1(x) = \begin{cases} x & \textit{pour } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \textit{pour } x = a \end{cases},$$

$$\varphi_2 : U_2 = \mathbb{R}^* \cup \{b\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad b \longmapsto \varphi_2(y) = \begin{cases} y & \textit{pour } y \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \textit{pour } y = b \end{cases}.$$

Les cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) forment un atlas et M est une variété différentiable. Cependant, la topologie associée n'est pas séparée ; deux voisinages quelconques des points a et b ne sont pas disjoints.

L'une des raisons d'avoir exigé que la variété soit séparée est de pouvoir conserver certains résultats connus en topologie. Par exemple, sur un espace non séparé il n'y a pas de métrique, un sous-espace compact n'est pas toujours fermé, l'image d'un compact par une application continue n'est pas forcément *compact, etc. Mais cela n'empêche qu'il y a d'autres raisons pour exclure la condition de séparation de la définition d'une variété.*

b) Comme exemple de variété sans base dénombrable, soient

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ ou } z = 0\},$$

et $U \subset M$, l'ensemble défini par

$$U = \{(x, y, z) : x \neq 0 \text{ ou } y = \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Considérons l'application définie par

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \longmapsto (x, \zeta(x, y, z)),$$

où

$$\zeta(x, y, z) = \begin{cases} \frac{y-\alpha}{x}, & x \neq 0 \\ z, & x = 0 \end{cases} .$$

Le couple (U, φ) est une carte sur M. On montre aisément [48, p. 176] que M est une variété différentiable séparée connexe et ne possède pas de base dénombrable.

Un autre exemple de variété sans base dénombrable est donné par la droite d'Alexandrov que l'on note d (ensemble des classes d'équivalence des ensembles totalement ordonnés dénombrables). On définit dans $d \times [0, 1]$, un ordre comme suit : $(t, x) < (s, y)$ si $t < s$, ou $t = s$ et $x < y$. Les intervalles suivants :

$$\{a \in d \times [0, 1] : b < a < c\}, \qquad \{b \in d \times [0, 1] : a > b\},$$

forment la topologie de $d \times [0, 1]$.

La seconde condition imposée dans la définition d'une variété concerne le fait que la topologie définie par les domaines des cartes ait une base dénombrable. Ceci a été fait afin d'éviter un certain nombre de pathologies des espaces topologiques car on sait par exemple qu'un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ ne peut être homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^m$ si $n \neq m$. Sans cette condition, il est possible de munir R^n d'une topologie qui le rende homéomorphe à R^m muni de la topologie canonique, pour $m < n$ arbitraire. Comme nous l'avons signalé ci-dessus, des auteurs définissent une variété sans exiger que sa topologie soit à base dénombrable, une telle variété est dite variété « généralisée ».

Remarque 1.3 *Signalons que sur un même espace topologique, il peut exister une ou plusieurs structures différentiables et même il existe des variétés topologiques qui n'admettent aucune structure différentiable. On connaît actuellement des variétés topologiques qui possèdent plusieurs structures différentiables* *non isomorphes. Le premier exemple, obtenu en 1956 par John Milnor*[1]*, est la sphère de dimension* 7*. Pour la topologie canonique, la sphère unité* S^7 *de dimension* 7 *peut être munie de 28 structures différentiables différentes. Ces 28 variétés différentiables sont homéomorphes à* S^7 *mais non difféomorphes entre elles, on les appelle sphères de Milnor (ou sphères exotiques). John Milnor a obtenu pour ses résultats, la Médaille Fields (1962), le Prix Abel (2011) ainsi que d'autres prix prestigieux. Il existe par ailleurs des variétés topologiques qui n'admettent aucune structure différentielle (Michel Kervaire*[2]*).*

Soit M un espace topologique. On veut « structurer » M en une variété différentiable. On admet que cette structure doit définir la topologie dont est muni l'espace M, c.-à-d., cette structure doit être compatible avec la topologie. Pour cela, il faut que l'atlas (plus précisément, une classe d'équivalence d'atlas sur M) qui définit sur M une structure différentiable possédant cette propriété soit composé de cartes (U_i, φ_i) dont les domaines U_i soient ouverts et les applications $\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i)$ soient des homéomorphismes. On montre que cette condition est suffisante. Plus précisément, soient M un espace topologique, U_i un ensemble ouvert dans M, $\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i)$ un homéomorphisme et $A = U_i, \varphi_i)$ un atlas de M. Alors, la structure différentiable définie par l'atlas A est compatible avec la topologie de l'espace M. Dans la preuve de cette proposition, on remarquera les deux faits suivants :

(i) La topologie de chaque ensemble U_i est définie exclusivement par l'application φ_i (un ensemple $O \subset U_i$ est ouvert si et seulement si l'ensemble $\varphi_i(O)$ l'est dans $\mathbb{R}^n$).

(ii) Pour tout espace topologique M et tout recouvrement ouvert (U_i) de M, la topologie de M est définie de façon unique par les topologies des éléments U_i de ce recouvrement.

En résumé, une variété différentiable admet une topologie « naturelle » dont les ouverts sont les unions des domaines de cartes de cette variété.

1.6 Exercices et problèmes fondamentaux

Exercice 1.1 *Montrer que tout espace discret dénombrable est une variété de dimension* 0.

♣ *Solution* : En effet, si (p_i) est la suite de points de cet espace, les cartes sont les couples $((p_i), \varphi_i)$ où φ_i est l'unique application de (p_i) sur $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. Les cartes de cette variété sont disjoints et donc celle-ci est de classe $\mathcal{C}^r$.

[1] Milnor, J. : On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, *Annals of Math.* 64, 399-405 (1956).

[2] Kervaire, M. : A manifold which does not admit any differentiable structure, *Comm. Math. Helv.*, 34, 257-270 (1960).

Exercice 1.2 *Montrer que $\mathbb{R}^n$ est une variété de dimension n.*

♣ *Solution* : En effet, pour $\mathbb{R}^n$ une carte est constituée du couple $(\mathbb{R}^n, id)$ où $id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est l'application identique. Un atlas est l'ensemble constitué de cette unique carte.

Exercice 1.3 *Montrer que tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n est une variété de dimension n.*

♣ *Solution* : En effet, il suffit de considérer l'atlas (E, φ) où $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme.

Exercice 1.4 *Montrer que tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une variété.*

♣ *Solution* : En effet, il suffit de noter que les couples (U, φ) où φ est un difféomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, sont des cartes.

Exercice 1.5 *Montrer que l'ensemble des matrices $M_n(\mathbb{R})$ d'ordre n, est une variété et préciser sa dimension.*

♣ *Solution* : Comme $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, alors d'après l'exercice 1.2, $M_n(\mathbb{R})$ est une variété de dimension n^2.

Exercice 1.6 *Même question pour le groupe linéaire*

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}.$$

♣ *Solution* : On a

$$GL(n, \mathbb{R}) = \overset{-1}{\det}(\mathbb{R}^*),$$

où $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \longmapsto \det A$, est l'application déterminant. Comme $\mathbb{R}^*$ est un ouvert et que det est continue, alors $GL(n, \mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ et le résultat découle de l'exercice 1.4 ci-dessus (voir aussi problème 1.22).

Exercice 1.7 *(Cercle S^1). Montrer que le cercle $\mathcal{S}^1$ dans $\mathbb{R}^2$, muni de la topologie induite, est une variété différentiable de dimension* 1.

♣ *Solution* : Notons que le cercle $\mathcal{S}^1$ est séparé et à base dénombrable car sa topologie est induite par $\mathbb{R}^2$. Soient $p_0 = (1, 0)$, $q_0 = (-1, 0)$ deux points sur S^1 et posons $U_1 = S^1 \backslash \{p_0\}$, $U_2 = S^1 \backslash \{q_0\}$. Soient φ_1 et φ_2 les applications définies par

$$\begin{aligned} \varphi_1 \quad &: \quad U_1 \longrightarrow]0, 2\pi[, \quad (\cos\theta, \sin\theta) \longmapsto \theta, \\ \varphi_2 \quad &: \quad U_2 \longrightarrow]-\pi, \pi[, \quad (\cos\theta, \sin\theta) \longmapsto \theta. \end{aligned}$$