Chapitre 1

Droite numérique

1.1 Nombres réels

L'analyse mathématique a comme point de départ l'étude de l'ensemble des *nombres réels* qui est représenté par $\mathbb{R}$. Cet ensemble est muni d'une *opération d'addition* qui associe un nombre réel x *plus* y à tous réels x et y :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y \in \mathbb{R}\,;$$

et d'une *opération de multiplication* qui leur associe un nombre réel x *fois* y :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y \text{ (aussi noté } xy) \in \mathbb{R}.$$

Le résultat d'une addition est une *somme* et le résultat d'une multiplication, un *produit*.

Les cinq propriétés suivantes de l'addition et de la multiplication, où le signe = signifie une *égalité*, c'est-à-dire une identité, font de $\mathbb{R}$ ce qu'on appelle un *corps commutatif* :

P1 (commutativité) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x + y = y + x,$$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

P2 (associativité) Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x + y) + z = x + (y + z), \text{ noté } x + y + z,$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \text{ noté } x \cdot y \cdot z \text{ ou } xyz.$$

P3 (distributivité) Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

P4 (éléments neutres) Il existe des éléments $0 \in \mathbb{R}$ et $1 \in \mathbb{R}$ $(1 \neq 0)$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x + 0 = 0 + x = x,$$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

Les *éléments neutres* 0 et 1 pour l'addition et la multiplication, respectivement, sont uniques.

P5 (éléments symétriques) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un *élément opposé* $-x \in \mathbb{R}$ et un *élément inverse* $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (en autant que $x \neq 0$ dans ce dernier cas, et alors $x^{-1} \neq 0$) tels que

$$x + (-x) = 0,$$

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

Les éléments opposé et inverse sont uniques. La commutativité entraîne immédiatement les égalités

$$-(-x) = x = (x^{-1})^{-1}.$$

De plus, on a $-0 = 0$ et $1^{-1} = 1$, ce qui signifie que les éléments neutres sont leurs propres éléments symétriques. Enfin, pour tous x et $y \in \mathbb{R}$, l'*opération de soustraction* est définie par

$$x - y = x + (-y)\,;$$

et l'*opération de division* par

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1},$$

en autant que $y \neq 0$. Le résultat d'une soustraction est une *différence* et le résultat d'une division un *quotient*. Un quotient se compose d'un *numérateur* (x ci-dessus) et d'un *dénominateur* (y ci-dessus).

L'ensemble $\mathbb{R}$ est également muni d'une *relation d'ordre strict* de telle sorte que $x < y$ pour deux nombres réels x et y distincts, c'est-à-dire *inégaux* ($x \neq y$), signifie que x est *inférieur* à y ou, ce qui est équivalent, que y est *supérieur* à x, ce qui est noté $y > x$.

On écrit $x \leqslant y$ pour signifier que x est *inférieur ou égal* à y, c'est-à-dire $x < y$ ou $x = y$, et de même $x \geqslant y$ pour signifier que x est *supérieur ou égal* à y, c'est-à-dire $x > y$ ou $x = y$. On définit ainsi une *relation d'ordre* sur $\mathbb{R}$.

On dit que le nombre x est *positif* (*strictement*) lorsque $x \geqslant 0$ ($x > 0$), et *négatif* (*strictement*) lorsque $x \leqslant 0$ ($x < 0$).

Les propriétés suivantes font de $\mathbb{R}$ un *ensemble totalement ordonné*, avec une relation d'ordre qui est compatible avec l'opération d'addition par un nombre réel quelconque et l'opération de multiplication par un nombre réel strictement positif :

P6 (trichotomie) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\text{soit } x < y, \ \text{soit } x = y, \ \text{soit } x > y,$$

ces trois possibilités étant mutuellement exclusives.

P7 (transitivité) Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$ avec égalité si et seulement si $x = y = z$.

P8 (compatibilité) Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

(a) si $x \leqslant y$, alors $x + z \leqslant y + z$ avec égalité si et seulement si $x = y$, en particulier $x - y \leqslant y - y = 0$ avec égalité si et seulement si $x = y$;

(b) si $x \leqslant y$ et $z > 0$, alors $x \cdot z \leqslant y \cdot z$ avec égalité si et seulement si $x = y$.

Finalement, la relation d'ordre du corps commutatif totalement ordonné $\mathbb{R}$ possède la propriété remarquable suivante :

P9 (bornes supérieure et inférieure) Si $E \subseteq \mathbb{R}$ est non vide et possède un *majorant* $M \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, x \leqslant M,$$

alors E possède une *borne supérieure* (ou *supremum*) $\sup E \in \mathbb{R}$ qui est le plus petit majorant de E, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, x \leqslant \sup E,$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \text{ majorant de } E, \sup E \leqslant M.$$

Sinon, $\sup E = +\infty$. Le supremum est unique. De façon analogue, si $E \subseteq \mathbb{R}$ est non vide et possède un *minorant* $m \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, x \geqslant m,$$

alors E possède une *borne inférieure* (ou *infimum*) $\inf E \in \mathbb{R}$ qui est le plus grand minorant de E, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, x \geqslant \inf E,$$

$$\forall m \in \mathbb{R} \text{ minorant de } E, \inf E \geqslant m.$$

Sinon, $\inf E = -\infty$. L'infimum est unique. Enfin, si $E \subseteq \mathbb{R}$ est non vide et possède un majorant et un minorant, donc une borne supérieure et une borne inférieure, alors E est dit *borné*.

Remarque 1.1.1. On a les règles suivantes sur les opérations d'addition et de multiplication qui impliquent $-\infty$ ou $+\infty$ et $a \in \mathbb{R}$ $(a > 0)$:

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$+\infty + \infty = +\infty, \qquad a \pm \infty = \pm\infty, \qquad -a \pm \infty = \pm\infty,$$

$$0 \pm \infty = \pm\infty, \qquad a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \qquad -a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty.$$

De plus, on a $(\pm\infty)^{-1} = 0$. En revanche, les multiplications $0 \cdot (\pm\infty)$ et les divisions $\pm\infty/\pm\infty$, comme $0/0$ par ailleurs, sont des *opérations indéterminées*.

L'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$ qui possède toutes les propriétés énoncées ci-dessus est une question qui relève de la théorie des ensembles. Les propriétés supplémentaires ci-dessous sont en fait des conséquences de ces propriétés. Quelques-unes de ces propiétés sont illustrées dans la figure 1.

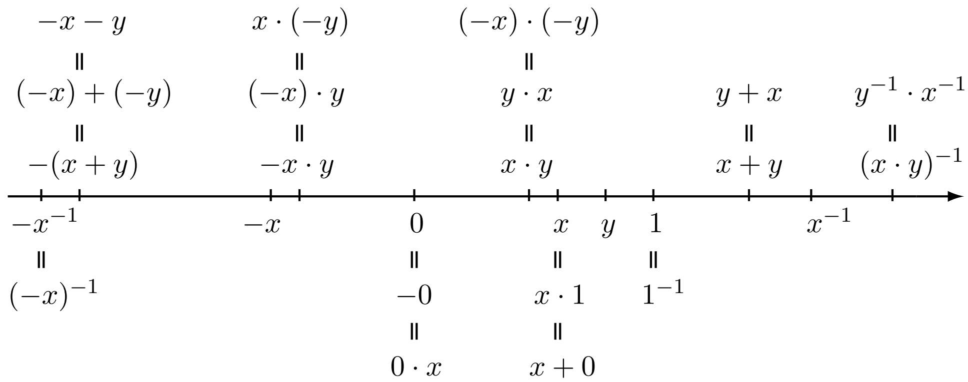

FIGURE 1: Droite numérique.

C1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0\cdot x = x\cdot 0 = 0$. En effet, $0\cdot x = (0+0)\cdot x = 0\cdot x + 0\cdot x$, et donc

$$0 = 0\cdot x + (-0\cdot x) = (0\cdot x + 0\cdot x) + (-0\cdot x) = 0\cdot x + (0\cdot x - 0\cdot x) = 0\cdot x + 0 = 0\cdot x,$$

qui est égal à $x \cdot 0$ par commutativité.

C2 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $-(x\cdot y) = (-x)\cdot y = x\cdot(-y)$, en particulier $-y = -(1\cdot y) = (-1)\cdot y$. En effet,

$$x\cdot y + (-x)\cdot y = (x-x)\cdot y = 0\cdot y = 0 = x\cdot 0 = x\cdot(y-y) = x\cdot y + x\cdot(-y).$$

C3 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x\cdot y = (-x)\cdot(-y)$. En effet,

$$(-x)\cdot(-y) = -x\cdot(-y) = -(-x\cdot y) = x\cdot y.$$

C4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(x \neq 0)$, on a $(-x)^{-1} = -x^{-1}$, et donc particulier $(-1)^{-1} = -1^{-1} = -1$. En effet,

$$(-x)\cdot(-x^{-1}) = (-x)\cdot(-1\cdot x^{-1}) = (-x)\cdot((-1)\cdot x^{-1}) = ((-x)\cdot(-1))\cdot x^{-1},$$

qui est égal à $(x\cdot 1)\cdot x^{-1} = x\cdot x^{-1} = 1$.

C5 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $-(x+y) = -x-y$. En effet,

$$(x+y)+(-x-y) = (y+x)+(-x-y) = y+(x+(-x-y)),$$

qui est égal à

$$y+((x-x)-y) = y+(0-y) = y-y = 0.$$

C6 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ ($x \neq 0$, $y \neq 0$), on a $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$. En effet, on a alors

$$(x \cdot y) \cdot (x^{-1} \cdot y^{-1}) = (x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = ((x \cdot y) \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1},$$

qui est égal à

$$(x \cdot (y \cdot y^{-1})) \cdot x^{-1} = (x \cdot 1) \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1.$$

C7 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($x \neq 0$), on a $x > 0$ si et seulement si $-x < 0$. En effet, si $x > 0$, alors

$$0 = x + (-x) > 0 + (-x) = -x,$$

et si $-x < 0$, alors

$$0 = x + (-x) < x + 0 = x.$$

C8 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ ($x \neq y$), on a $x > y$ si et seulement si $-x < -y$. En effet, on a $x - y > 0$ si et seulement si

$$-(x - y) = -x - (-y) = -x + y < 0.$$

La propriété de compatibilité permet de conclure.

C9 Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x < y$ et $z < 0$, alors $x \cdot z > y \cdot z$. En effet, on a alors $-z > 0$, et donc

$$-(x \cdot z) = x \cdot (-z) < y \cdot (-z) = -(y \cdot z),$$

ce qui est équivalent à la conclusion par C8.

C10 On a $1 > 0$. Sinon, $1 = -(-1) < 0$, donc $-1 > 0$ par C7, et alors

$$1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1) > 0 \cdot (-1) = 0,$$

ce qui est une contradiction par la propriété de trichotomie.

C11 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($x \neq 0$), on a $x > 0$ si et seulement si $x^{-1} > 0$. En effet, si $x > 0$ et $x^{-1} < 0$, alors

$$1 = x \cdot x^{-1} < x \cdot 0 = 0,$$

ce qui entre en contradiction avec C10. De même, si $x < 0$ et $x^{-1} > 0$, alors

$$1 = x \cdot x^{-1} < 0 \cdot x^{-1} = 0,$$

ce qui entre encore en contradiction avec C10. La propriété de trichotomie permet de conclure.

C12 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $y > x > 0$, alors $y^{-1} < x^{-1}$, en particulier $y^{-1} < 1^{-1} = 1$ si $y > 1$. En effet, si $y^{-1} = x^{-1}$, alors

$$y = (y^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} = x,$$

ce qui est une contradiction. D'autre part, si $y^{-1} > x^{-1}$, alors

$$1 = y \cdot y^{-1} > y \cdot x^{-1} > x \cdot x^{-1} = 1,$$

ce qui est encore une contradiction. La propriété de trichotomie permet de conclure.

C13 Pour tous $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, si $x > a$ et $y > b$, alors $x + y > a + b$, en particulier $x + y > 0 + 0 = 0$ si $x > 0$ et $y > 0$. En effet, on a alors par compatibilité

$$x + y > x + b > a + b,$$

et la conclusion découle de la transitivité.

C14 Pour tous $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, si $x > a > 0$ et $y > b > 0$, alors $x \cdot y > a \cdot b > 0$. En effet, on a alors par compatibilité

$$x \cdot y > a \cdot y > a \cdot b > 0 \cdot b = 0,$$

et la transitivité permet de conclure.

1.2 Valeur absolue

La *valeur absolue* de $x \in \mathbb{R}$ est définie par

$$|x| = \begin{cases} x > 0 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -x > 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On a donc $|x| \geqslant 0$, avec $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est ainsi *valuée*. En utilisant le nombre $|x - y|$ comme *distance* entre deux nombres réels x et y, l'ensemble $\mathbb{R}$ est un *espace métrique*.

Les principales propriétés de la valeur absolue sont énoncées dans la proposition ci-dessous, dont la plus remarquable est l'inégalié du triangle.

Proposition 1.2.1 (propriétés de la valeur absolue). *Pour tous nombres $x, y \in \mathbb{R}$, on a :*

(a) $|-x| = |x|$;

(b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

(c) $-m \leqslant x \leqslant m$ *si et seulement si* $|x| \leqslant m$*, en particulier* $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$;

(d) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$*, qui est appelé l'*inégalité du triangle.

Démonstration. (a) Si $x = 0$, alors $-x = 0$, et donc $|-x| = |x| = 0$. Si $x > 0$, alors $-x < 0$, et donc

$$|-x| = -(-x) = x = |x|.$$

Enfin, si $x < 0$, alors $-x > 0$, et donc $|-x| = -x = |x|$.

(b) Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $x \cdot y = 0$ et $|x| = 0$ ou $|y| = 0$, d'où on obtient $|x \cdot y| = 0 = |x| \cdot |y|$. Si $x > 0, y > 0$, alors $x \cdot y > 0$, et donc

$$|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|.$$

Si $x < 0, y > 0$, alors $x \cdot y < 0 \cdot y = 0$, et donc

$$|x \cdot y| = -x \cdot y = (-x) \cdot y = |x| \cdot |y|.$$

Le cas où $x > 0$ et $y < 0$ est symétrique au précédent. Enfin, si $x < 0, y < 0$, alors $x \cdot y = (-x) \cdot (-y) > 0$, et donc

$$|x \cdot y| = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|.$$

(c) On a $x \leqslant m$, c'est-à-dire $x = m$ ou $x < m$, si et seulement si $-x = -m$ ou $-x > -m$, c'est-à-dire si et seulement si $-x \geqslant -m$. On a donc $-m \leqslant x \leqslant m$ si et seulement si

$$-m \leqslant -x \leqslant -(-m) = m,$$

ce qui implique que $|x| \leqslant m$. Inversement, on a $|x| \leqslant m$ si et seulement si $-|x| \geqslant -m$, ce qui implique que

$$-m \leqslant x = -(-x) \leqslant m.$$

(d) Par P8 et C13, les relations $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ et $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$ entraînent que

$$-(|x| + |y|) = -|x| - |y| \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|.$$

La propriété précédente permet alors de conclure. $\square$