Pour bien démarrer : *ensembles, applications, relations binaires, etc.*

01

RÉPARTITION DES EXERCICES

I. Énoncés des exercices

1.01 Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E vers F, g une application de F vers G. Montrer que :

a) $g \circ f$ injective $\implies$ f injective.

b) $g \circ f$ injective et f surjective $\implies$ g injective.

c) $g \circ f$ surjective $\implies$ g surjective.

d) $g \circ f$ surjective et g injective $\implies$ f surjective.

$\diamond$

1.02 Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non monotone.

$\diamond$

1.03 Soit f la fonction définie de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, f(x) = \dfrac{2+x}{3-x}\cdot$

1°) Soit y un réel fixé. Résoudre l'équation $y = \dfrac{2+x}{3-x}\cdot$

2°) En déduire que f est injective, mais qu'elle n'est pas bijective. Montrer en revanche qu'il existe un réel a tel que f soit une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, et expliciter la bijection réciproque.

$\diamond$

1.04 Soit $f : \mathbb{R} \to \left]-1, 1\right[$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}\cdot$ Montrer que f est bijective, préciser la bijection réciproque.

$\diamond$

1.05 On définit dans l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ la relation $\leqslant$ par :

$$f \leqslant g \iff \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x)$$

1°) Vérifier que $\leqslant$ est bien une relation d'ordre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Est-elle totale ?

2°) Soient f et g appartenant à $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, à quelle condition la partie $A = \{f, g\}$ possède-telle un *maximum* ? A possède-t-elle toujours une borne supérieure ?

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ possède-t-elle une borne supérieure ?

$\diamond$

1.06 Si f est une application de E vers F, on dit qu'une partie A de E est un **domaine d'injectivité** de f si la restriction de f à A est injective, et ce domaine est dit **maximal** si le seul domaine d'injectivité contenant A est A.
Déterminer un domaine d'injectivité maximal pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ et pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - x$
Montrer que si A est un domaine d'injectivité, le domaine A est maximal si et seulement si $f(A) = f(E)$.

$\diamond$

1.07 On définit dans l'ensemble des fonctions réelles définies sur $[0, +\infty[$ les relations R et S suivantes :

$$f\ R\ g \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, A > 0, \forall\, x > A, |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

et

$$f\ S\ g \Longleftrightarrow \exists\, A > 0, \forall\, \varepsilon > 0, \forall\, x > A, |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Vérifier que R et S sont réflexives, symétriques et transitives.
Quelle relation implique l'autre ? Donner un exemple de couple (f, g) vérifiant l'une et pas l'autre.

$\diamond\diamond$

1.08 E est un ensemble ordonné dans lequel toute partie finie admet une borne inférieure et une borne supérieure. Soit $(x_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une famille d'éléments de E. Montrer que :

$$\inf_{1 \leq i \leq n} \big[\sup_{1 \leq j \leq p} x_{i,j} \big] \geqslant \sup_{1 \leq j \leq p} \big[\inf_{1 \leq i \leq n} x_{i,j} \big].$$

$\diamond$

1.09 Le plan usuel est rapporté à un repère $\mathcal{R}$. On considère 5 points du plan, dont les coordonnées sont toutes entières. Montrer qu'il existe au moins deux points de cette famille tels que le milieu du segment qu'ils déterminent soit à coordonnées entières.

$\diamond$

1.10 Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E, A et B deux parties de E fixées, on note $\overline{X}$ le complémentaire de X dans E et on considère :

$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), X \mapsto (A \cap X) \cup (B \cap \overline{X}).$$

Montrer que l'équation $f(X) = \emptyset$ a au moins une solution si et seulement si $A \cap B = \emptyset$ et déterminer alors toutes les solutions de cette équation.

$\diamond$

1.11 Soit E, F deux ensembles, f une application de E vers F, g une application de F vers E.
Montrer que si $f \circ g \circ f$ est bijective, alors f et g sont bijectives.

$\diamond$

1.12 Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $\forall\, t \in \mathbb{R}, F(t) = \big(\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, \dfrac{2t}{1 + t^2}\big)$

1°) Montrer que F est injective.

2°) Montrer que $F(\mathbb{R}) \subset S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$.

3°) On pose $E = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$. Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur E, notée $\widetilde{F}$, et déterminer la bijection réciproque $\widetilde{F}^{-1}$.

4°) Retrouver le résultat précédent en posant $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

◇

1.13 *Des images et des images réciproques.*

Soient E et F des ensembles et f une application de E dans F.

1°) Soit A un sous-ensemble de E.

a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.

b) Montrer que si f est injective alors $A = f^{-1}(f(A))$.

c) Soit x un élément de E. Montrer que si $f^{-1}\big(f(\{x\})\big) = \{x\}$ alors $f(x)$ n'a qu'un seul antécédent.

d) En déduire que : f injective $\Longleftrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(E), f^{-1}\big(f(X)\big) = X$.

2°) Soit B un sous-ensemble de F.

a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

b) Montrer que si f est surjective alors $B = f(f^{-1}(B))$.

c) Soit y un élément de F. Montrer que si $f\big(f^{-1}(\{y\})\big) = \{y\}$ alors y a au moins un antécédent.

d) En déduire que : f surjective $\Longleftrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(F), f\big(f^{-1}(X)\big) = X$.

◇

1.14 Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{z}\cdot$

1°) f est-elle injective ? Surjective ?

On considère les ensembles $E = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - 1| = 1\}$ et $F = \left\{z \in \mathbb{C} \ / \ \text{Ré}(z) = \frac{1}{2}\right\}$.

2°) a) Si on identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel, donner la nature géométrique de E et F et donner leurs équations cartésiennes.

b) Vérifier que $f(E \setminus \{0\}) \subset F$.

c) Montrer que f induit une bijection de $E \setminus \{0\}$ sur F.

◇

1.15 Soit f une application **croissante** de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. On souhaite montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $\ell \in [0, 1]$ tel que $f(\ell) = \ell$.

1°) On pose $A = \{x \in [0, 1] \ / \ f(x) \geqslant x\}$. Montrer que A est non vide et majorée.

2°) On note alors $c = \sup A$. Montrer que $c \in [0, 1]$.

3°) Montrer que $c \leqslant f(c)$, puis montrer que $f(c) \in A$.

4°) Conclure.

◇

1.16 Une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $A_n = \{k \in \mathbb{N} \,/\, 2^k$ est un diviseur de $n\}$.

1°) Décrire l'ensemble A_0.

2°) Supposons désormais $n \neq 0$. Montrer que A_n admet un plus grand élément p.

3°) Montrer que n se décompose en $n = 2^p.(2q+1)$ avec q nombre entier.

4°) En déduire que l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*, (p,q) \mapsto 2^p(2q+1)$ est bijective.

◇

1.17 Existe-t-il une fonction surjective f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = (f(x))^2$?

◇

1.18 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x).$$

Montrer que f est constante.

◇

1.19 **Equivalence des principes de récurrence et du plus grand élément dans $\mathbb{N}$.**

1°) Rappeler les principes de récurrence et du plus grand élément dans $\mathbb{N}$.

2°) On suppose acquis le principe de récurrence. Soit E un ensemble fini et non vide de $\mathbb{N}$. Montrer par récurrence sur $n = \mathrm{card}(E)$ que E admet un plus grand élément.

3°) Supposons à présent que le principe du plus grand élément soit vrai. Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel n. En considérant l'ensemble :

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,/\, P(0) \text{ et } P(1) \text{ et } P(2) \text{ et } \ldots \text{ et } P(n) \text{ sont vraies }\}$$

montrer que le principe de récurrence est vrai.

En déduire que le principe de récurrence et le principe du plus grand élément dans $\mathbb{N}$ sont équivalents.

◇◇◇

1.20 Soit E un ensemble quelconque. Montrer qu'il n'existe aucune application f définie sur E et à valeurs dans $\mathcal{P}(E)$ qui soit surjective.

◇

1.21 **1**°) Rappeler la formule donnant $\tan(a-b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$ et préciser le domaine de validité de cette formule. Que vaut $\tan\frac{\pi}{6}$?

2°) Montrer que parmi 7 réels quelconques, il en existe toujours deux notés x et y vérifiant $0 \leqslant \dfrac{x-y}{1+xy} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

◇

1.22 **1**°) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective, telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}, f(n) \leqslant n$.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, f(n) = n$.

2°) Déterminer les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n.$$

II. Indications

1.01. Rappelons que si f est une application d'un ensemble E vers un ensemble F, on dit que :
f est injective, si : $\forall\, x, y \in E, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$;
f est surjective si : $\forall\, y \in F, \exists\, x \in E, f(x) = y$;

1.02. et que f est bijective si elle est injective et surjective, ce qui s'écrit aussi :
f est bijective si : $\forall\, y \in F, \exists!\, x \in E, f(x) = y$.

1.04. Distinguer selon le signe de x et ne pas oublier de vérifier que f est bien à valeurs dans $]-1, 1[$.

1.05. Une relation binaire R sur un ensemble E est une relation d'ordre (non nécessairement totale) si elle est :
réflexive : $\forall\, x \in E, x\, R\, x$;
transitive : $\forall\, x, y, z \in E, [x\, R\, y$ et $y\, R\, z] \implies x\, R\, z$;
antisymétrique : $\forall\, x, y \in E, [x\, R\, y$ et $y\, R\, x] \implies y = x$;

1.07. . . . et R est symétrique si : $\forall\, x, y \in E, x\, R\, y \implies y\, R\, x$.

1.09. Si les coordonnées d'un point du plan usuel sont entières, chacune d'elles peut être paire ou impaire : il y a donc 4 possibilités . . .

1.12. Attention, si les réels u et v ne sont pas supposés positifs ou nuls, $u^2 = v^2$ n'est pas équivalent à $u = v$.

1.13. Si $f : E \to F$ et $B \subset F$, on a $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$, ce qui ne suppose rien sur la fonction f, mais est une notation purement ensembliste.

1.15. Pour **3)** montrer que pour tout x de A on a $x \leqslant f(c)$ et utiliser la définition de la borne supérieure, puis la croissance de f.

1.16. Tout entier se factorise d'une façon et d'une seule comme produit de nombres premiers, et tous les nombres premiers sont impairs sauf 2 . . .
Au fait, vous connaissez cette histoire ? ⟪Doit-on dire : tous les nombres premiers sont impairs sauf un, ou doit-on dire : tous les nombres premiers sont impairs sauf deux ?⟫ (!)

1.17. Si f convient, soit y tel que $f(y) = -1$. Montrer que $y^2 = -1$.

1.18. Donner à x et y des valeurs particulières, jusqu'à avoir assez de renseignements.

1.20. Pour f application quelconque de E vers $\mathcal{P}(E)$, considérer la partie $A = \{a \in E \;/\; a \notin f(a)\}$ et montrer que cette partie n'est pas dans l'image de f.

1.21. 2) Prendre les arctangentes de ces 7 nombres et remarquer qu'il y en a deux dont la différence ne vaut pas plus de $\pi/6$.

1.22. 2) Montrer par récurrence que, pour tout n on a, $f(n) = n$. Pour cela supposer la propriété vraie jusqu'à un certain rang n et fausse au rang $n + 1$, distinguer alors les trois cas $f(n+1) < n+1$, $f^2(n+1) < n+1$ et $f^3(n+1) < n+1$.

III. Corrigés détaillés des exercices

Corrigé 1.01

a) *On suppose $g \circ f$ injective.*

Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors, en appliquant g : $g(f(x)) = g(f(x'))$, *i.e.* $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Comme $g \circ f$ est injective, il vient $x = x'$, ce qui prouve que f est injective.

b) *On suppose $g \circ f$ injective et f surjective.*

Soient $y, y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$. Comme f est surjective, il existe x et x' dans E tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. On a donc $g(f(x)) = g(f(x'))$, *i.e.* $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Comme $g \circ f$ est injective, il vient $x = x'$ et $y = f(x) = f(x') = y'$. Donc g est injective.

c) *On suppose $g \circ f$ surjective.*

Soit $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$. On pose alors $y = f(x)$, on a $y \in F$ et $z = g(y)$, ce qui prouve que g est surjective de F vers G.

d) *On suppose $g \circ f$ surjective et g injective.*

Soit $y \in F$. L'élément $g(y)$ appartient à G et comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $g(y) = g \circ f(x) = g(f(x))$. Comme g est injective, on en déduit $y = f(x)$, ce qui prouve bien que y est dans l'image de f et f est surjective.

Corrigé 1.02

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1, f(1) = 0$ et si $x \notin \{0, 1\}, f(x) = x$. Il est immédiat que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ non monotone.

Corrigé 1.03

1°) On a $y = \dfrac{2+x}{3-x} \iff [y(3-x) = 2 + x \text{ et } x \neq 3] \iff [x(y+1) = 3y - 2 \text{ et } x \neq 3]$.

$\star$ Si $y = -1$, il vient $0 = -5$ et l'équation n'a donc pas de solution.

$\star$ Sinon l'unique solution est $x = \dfrac{3y-2}{y+1}$.

2°) Tout élément de $\mathbb{R}$ admet donc au plus un antécédent et f est injective. Mais -1 n'admet pas d'antécédent donc f n'est pas surjective et donc pas bijective. Néanmoins f induit une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. La bijection réciproque est :

$$\boxed{f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}, y \mapsto \frac{3y-2}{y+1}}$$

Corrigé 1.04

$\star$ On a : $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{x}{1-x} = -1 + \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

Comme $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$, on en déduit que f, qui est continue sur $\mathbb{R}$, est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Avec $\lim\limits_{-\infty} f = -1$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 1$, on conclut :

$$\boxed{f \text{ est une bijection strictement croissante de } \mathbb{R} \text{ sur }]-1, 1[}$$

$\star$ Plus précisément $x \mapsto y = \dfrac{x}{1+x}$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0, 1[$ et $x \mapsto y = \dfrac{x}{1-x}$ est une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur $]-1, 0]$.

Dans le premier cas, il vient $\forall\, y \in [0, 1[, x = \dfrac{y}{1-y}$ et dans le second $\forall\, y \in]-1, 0], x = \dfrac{y}{1+y}$, ce que l'on peut écrire en une seule fois :

$$\boxed{f^{-1} :]-1,1[\to \mathbb{R}, y \mapsto \frac{y}{1-|y|}}$$

Corrigé 1.05

1°) $\star$ Pour toute fonction f, on a $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant f(x)$, donc $f \leqslant f$ et la relation $\leqslant$ est réflexive.

$\star$ Si f et g sont telles que $f \leqslant g$ et $g \leqslant f$, alors : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x)$ et $g(x) \leqslant f(x)$, donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$ et $f = g$ et la relation $\leqslant$ est antisymétrique.

$\star$ Enfin, si $f \leqslant g$ et $g \leqslant h$, alors $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x)$ et $g(x) \leqslant h(x)$, d'où $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant h(x)$ et $\leqslant$ est transitive, donc :

$$\leqslant \text{ est une relation d'ordre sur } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Soit $f : x \mapsto 0$ et $g : x \mapsto x$, on n'a pas $f \leqslant g$ puisque $f(-1) > g(-1)$ et on n'a pas $g \leqslant f$ puique $g(1) > f(1)$, donc f et g ne sont pas comparables et l'ordre $\leqslant$ n'est pas total.

2°) La partie A admet un *maximum* si et seulement si les deux éléments f et g sont comparables et alors le *maximum* de A est le plus grand des deux éléments f et g. En général A n'a donc pas de *maximum*.

En revanche, soit $A = \{f, g\}$, une fonction h est un majorant de A si et seulement $f \leqslant h$ et $g \leqslant h$, donc si et seulement si $\forall\, x \in \mathbb{R}, \max(f(x), g(x)) \leqslant h(x)$.
Soit donc $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \max(f(x), g(x))$, les majorants de A sont exactement les fonctions plus grandes que s et s est le plus petit des majorants, ce qui prouve que A admet s pour borne supérieure.

Plus généralement soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, il existe donc une fonction h telle que $\forall\, f \in A, f \leqslant h$.
Alors pour tout x fixé dans $\mathbb{R}$, on a $\forall\, f \in A, f(x) \leqslant h(x)$ et $A_x = \{f(x), f \in A\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure que l'on peut noter $s(x)$ et les majorants de A sont exactement les fonctions plus grandes que s, donc A admet s pour borne supérieure.

Corrigé 1.06

$\star$ Pour $f : x \mapsto x^2$, $\mathbb{R}_+$ est un domaine d'injectivité maximal.

$\to$ C'est un domaine d'injectivité car f y est strictement croissante ;

$\to$ et il est maximal car si B inclut strictement $\mathbb{R}_+$, il existe $x < 0$ dans B et on a : $f(x) = f(-x)$, avec $x \neq -x$ dans B, donc B n'est plus un domaine d'injectivité.

$\star$ $f : x \mapsto x^3 - x$ est dérivable, de dérivée $f' : x \mapsto 3x^2 - 1$. Elle est donc strictement croissante au moins sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[\![$, avec $f(-1) = f(1) = 0$.

Ainsi elle est strictement croissante donc injective sur $A =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$.
Comme $f(A) = \mathbb{R} = f(\mathbb{R})$, A est un domaine d'injectivité maximal d'après la propriété que nous allons démontrer juste après (!).

$\star$ Soit donc A un domaine d'injectivité de f, application de E vers F. Montrons que :

$$f(A) \neq f(E) \iff A \text{ non maximal.}$$

$\to$ Si $f(A) \neq f(E)$, il existe $y \in f(E) \setminus f(A)$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$; alors $x \in E \setminus A$ et f est injective sur $B = A \cup \{x\}$ car elle l'est sur A et $f(x)$ ne peut être l'image d'un élément de A ; A est bien non maximal.

$\rightarrow$ Si A non maximal, il existe B incluant strictement A sur lequel f est injective ; soit $x \in B \setminus A$; la fonction f étant injective sur B, $f(x)$ ne peut être aussi l'image d'un élément de A ; donc $f(x) \in f(E) \setminus f(A)$ et $f(A) \neq f(E)$.

On a donc bien démontré, par double contraposée :

$$\boxed{A \text{ maximal} \iff f(A) = f(E).}$$

Corrigé 1.07

Notons E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$.

$\star$ Considérons la relation binaire R.

$\rightarrow$ Pour toute fonction $f \in E$, on a clairement $f\,R\,f$, car pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir $A = 1525$ et $\forall\, x > 1525, |f(x) - f(x)| < \varepsilon$. Donc R est réflexive.

$\rightarrow$ Dès que l'on a $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, alors on a $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$, ce qui prouve, s'il en était besoin, que R est symétrique.

$\rightarrow$ Soit f, g, h telles que $f\,R\,g$ et $g\,R\,h$. Soit alors $\varepsilon > 0$ quelconque, le nombre $\frac{\varepsilon}{2}$ est encore strictement positif et donc :

$$\exists\, A > 0, \forall\, x > A, |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad ; \qquad \exists\, B > 0, \forall\, x > B, |g(x) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit alors $C = \max(A, B)$. Pour $x > C$, on a $x > A$ et $x > B$, ce qui permet d'écrire :

$|f(x) - h(x)| = |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

Donc, $\forall\, x > C, |f(x) - h(x)| < \varepsilon$ et $f\,R\,h$ et R est transitive.

[On aurait aussi pu dire que, par définition : $f\,R\,g \iff \lim\limits_{+\infty}(f - g) = 0$ et appliquer les propriété connues de la notion de limite . . .]

$\star$ Ne nous laissons pas abuser deux fois : dire que pour un x donné on a $\forall\, \varepsilon > 0, |f(x) - g(x)| < \varepsilon$, c'est dire que pour cet x on a $f(x) = g(x)$ et donc on a en fait :

$$f\,S\,g \iff \exists\, A > 0, \forall\, x > A, f(x) = g(x)$$

Sous cette forme, il est clair que S est réflexive, symétrique et transitive.

$\star$ S'il existe A tel que l'on ait une propriété pour tout $\varepsilon > 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A tel que l'on ait la propriété (et on peut même choisir toujours le même A !), par conséquent S implique R (si deux fonctions coïncident sur $[A, +\infty[$, la limite en $+\infty$ de leur différence est nulle ! !)

Prenons $f : x \mapsto \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x+1}$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$, on a $f\,R\,g$ mais on n'a pas $f\,S\,g$.

Corrigé 1.08

Soit $(x_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une famille d'éléments de $(E, \leqslant)$ On peut commencer par écrire que :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \forall\, j \in [\![1, p]\!], \inf_{1 \leq i \leq n}(x_{i,j}) \leqslant x_{k,j} \leqslant \sup_{1 \leq \ell \leq p}(x_{k,\ell})$$

et donc en passant au $\sup$ à gauche :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \sup_{1 \leq j \leq p}\Big[\inf_{1 \leq i \leq n}(x_{i,j})\Big] \leqslant \sup_{1 \leq \ell \leq p}(x_{k,\ell})$$

finalement en passant à l'$\inf$ à droite :

$$\boxed{\sup_{1 \leq j \leq p}\Big[\inf_{1 \leq i \leq n}(x_{i,j})\Big] \leqslant \inf_{1 \leq k \leq n}\Big[\sup_{1 \leq j \leq p}(x_{k,j})\Big]}$$