Chapitre I

Les objets

Dans ce chapitre nous mettons en place les objets de notre étude : le plan, la sphère de dimension deux, le plan projectif (un peu), l'espace projectif de dimension trois (très accessoirement) et les courbes de Jordan.
On en profite pour faire quelques rappels, mais il n'est pas question de reproduire ici un cours de topologie générale, il s'agit simplement de préciser quelques conventions et quelques notions : connexité, topologie quotient, prolongement de fonctions continues. Pour tout ce qui concerne la topologie générale on renvoie au livre de H. Queffélec [17], mais il existe bien d'autres bons ouvrages qui traitent de cette partie des mathématiques : le lecteur a l'embarras du choix.

1 Le plan, connexité

1.1 Dans ce qui suit, le plan muni de sa structure euclidienne[1] est simplement désigné par $\mathbf{R}^2$. La structure euclidienne est celle qui est donnée par le produit scalaire

$$\langle v,\, v'\rangle = xx' + yy' \quad \text{pour } v = (x, y) \text{ et } v' = (x', y')$$

La norme de v est $\|v\| =< v, v >^{1/2}= (x^2 + y^2)^{1/2}$ et la distance de v à v' est

$$d(v, v') = \|v - v'\| = [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}$$

La topologie du plan est celle qui est associée à cette distance : tout ouvert est soit vide, soit réunion de boules ouvertes $B(v, r) = \{w,\ d(v, w) < r\}$, avec $r > 0$; et une partie A est ouverte si et seulement si pour tout point $a \in A$ il

[1] Éventuellement affine euclidienne.

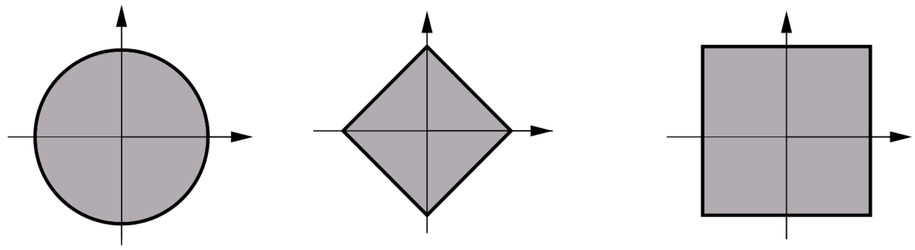


FIGURE I.1 – Les boules unités $B(0,1)$ pour les normes euclidienne, *somme* et *max*
.

existe $r > 0$ tel que $B(a,r)$ soit contenu dans A. Comme d'habitude, les fermés sont les complémentaires des ouverts.

Il existe bien d'autres normes sur le plan, mais les deux autres normes "classiques" – que nous utiliserons parfois – sont la norme *somme*, notée $\| \ \|_s$ et la norme *max*, notée $\| \ \|_m$ qui sont ainsi définies :

$$\|v\|_s = |x| + |y|, \quad \|v\|_m = \max(|x|,\, |y|)$$

Les distances associées sont aussi données par la formule $d_a(v,w) = \|v - w\|_a$ pour $a = s$ ou m. Toutes ces normes sont équivalentes, ce qui implique qu'elles confèrent au plan la même topologie.

Rappelons que la *distance d'un point x à un sous-espace* A est $d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a)$ et que $d(x,A) = 0$ si et seulement si x est dans l'adhérence (= la fermeture) $\overline{A}$ de A. La distance de deux sous-ensembles A et B est $\inf_{a\in A,\, b\in B} d(a,b)$. Notons encore que :

1.2 Proposition. *La boule B^2 est homéomorphe au plan*[2].

Démonstration. Soit $h : B^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application définie pour tout $v \in B^2$ par $h(v) = \dfrac{v}{1 - \|v\|}$. Alors h est continue, bijective d'inverse $w \mapsto \dfrac{w}{1 + \|w\|}$. □

On ne s'attarde pas plus sur ces généralités ; passons à une notion qui joue un grand rôle dans cet ouvrage :

1.3 Connexité. On dit qu'un espace topologique X est *connexe* s'il n'existe pas de partition de X en deux ouverts non vides. Une partie de X est connexe si elle l'est pour la topologie induite. Ainsi les seuls parties connexes de $\mathbf{R}$ sont les intervalles fermés, ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non.

[2] Rappelons que $B^2 = B(0,1)$ est la boule *ouverte* ; la boule fermée est appelée *disque* dans cet ouvrage.

La classification des connexes de $\mathbf{R}$ est donc très simple ; ce n'est pas le cas des connexes du plan qui peuvent être extrêmement complexes. Pour donner une idée de cette complexité disons, par exemple, qu'il existe une partition du plan en trois ouverts connexes et leur frontière *commune*, donc

$$\mathbf{R}^2 = A \cup B \cup C \cup F,\ F = A \setminus \overline{A} = B \setminus \overline{B} = C \setminus \overline{C},\ A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$$

Voici une description d'une telle partition du plan connue sous le nom de *lacs de Wada*[3], voir [9] :
– au temps $t = 0$: dans un océan (= le plan) d'eau bleue, il y a une île et dans cette île deux lacs, l'un d'eau jaune, l'autre d'eau rouge,
– au temps $t = 1/2$, on creuse un canal pour apporter l'eau bleue à une distance $1/2$ du lac jaune et du lac rouge,
– au temps $t = 3/4$, on creuse un canal pour apporter l'eau rouge à une distance $1/4$ de l'eau bleue et de l'eau jaune,
– au temps $t = 4/5$, on creuse un canal pour apporter l'eau jaune à une distance $1/5$ de l'eau rouge et de l'eau bleue,
– au temps $t = 5/6$, on creuse un canal pour apporter l'eau bleue à une distance $1/6$ de l'eau jaune et de l'eau rouge ...
Au temps $t = 1$ le plan est partagé en trois partie connexes, l'une bleue, les autres jaune et rouge, séparées par ce qui reste de l'île, leur frontière commune.

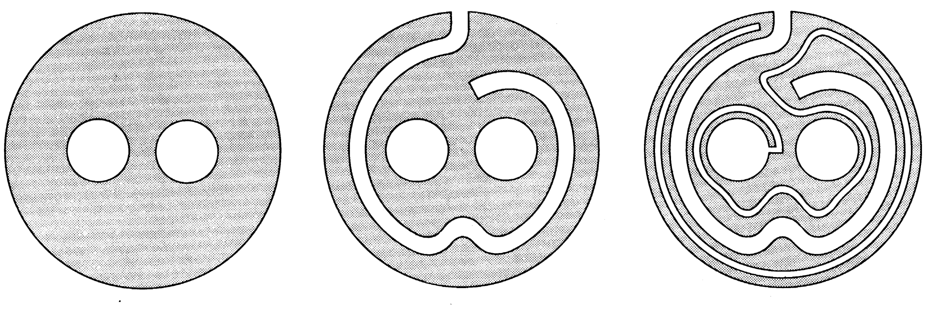


FIGURE I.2 – Les lacs de Wada aux temps $t = 0$, $t = 1/2$ et $t = 3/4$.

Plus généralement, rappelons pour terminer que la connexité organise une partition d'un espace en ses composantes connexes, la composante connexe d'un point étant le plus grand connexe contenant ce point ou, ce qui revient au même, la réunion de toutes les parties connexes contenant ce point.
Il se peut que la composante connexe de tout point d'un espace X soit réduite

[3]Pour de belles images, entrez "lakes of Wada" dans votre moteur de recherches préféré.

à ce point : on dit dans ce cas que X est *totalement discontinu*. C'est le cas notamment de l'ensemble $\mathbf{Q}$ des rationnels car les rationnels ne contiennent que les intervalles de longueur nulle ; c'est aussi le cas de l'ensemble de Cantor dont il est question plus loin dans ce chapitre.

1.4 Connexité par arcs. Un espace topologique X est dit *connexe par arcs* si deux points quelconques a et b de X peuvent être joints par un chemin, c'est-à-dire qu'il existe une application continue[4] $\alpha : I \to X$ telle que $\alpha(0) = a,\ \alpha(1) = b$. De la même façon, tout espace se décompose en la réunion disjointe de ses composantes connexes par arcs.

Il est facile de voir que "connexe par arcs $\Longrightarrow$ connexe" (cela tient au fait que I, donc $\alpha(I)$ est connexe) et il est bien connu que la réciproque est fausse, cependant :

1.5 Proposition. *Tout ouvert connexe du plan est connexe par arcs.*

Démonstration. Soient U un ouvert connexe du plan, C une composante connexe par arcs de U et soit a un point quelconque de C. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(a, r)$ soit contenue dans U. Mais tout point b de cette boule peut être joint à a par un chemin : le rayon qui passe par b. Ainsi $B(a, r)$ est contenue dans C ce qui prouve que C est ouverte. Pour la même raison, toutes les autres composantes connexes par arcs sont ouvertes, donc fermées comme complémentaires d'une réunion d'ouverts. Et ainsi $C = U$. □

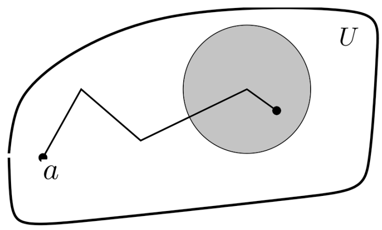
Remarque. La proposition ci-dessus est souvent utilisée *implicitement* dans la suite de cet ouvrage.

Dans la suite on utilisera aussi la propriété suivante :

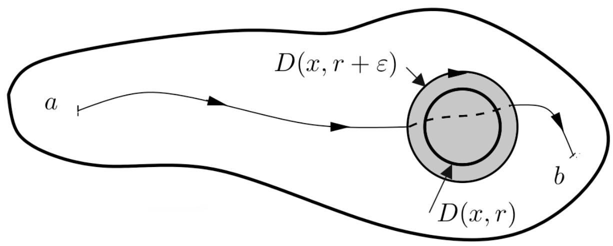
1.6 Proposition. *Soit U un ouvert du plan. Alors U est connexe si et seulement si, pour tout couple a, b de points de U il existe un* chemin polygonal *qui joint a à b.*

Démonstration. L'ensemble des points de l'ouvert connexe U qui peuvent être joints à un point fixé $a \in U$ par un chemin polygonal est un ouvert de U (dessin ci-dessous). Pour la même raison, son complémentaire l'est aussi, et ainsi ce complémentaire est vide. La réciproque est claire. □

[4]Rappelons que dans cet ouvrage le symbole I désigne l'intervalle [0, 1], sauf mention contraire.



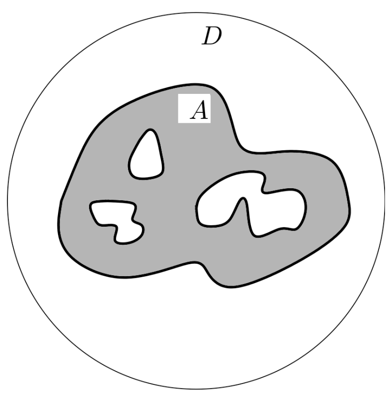
1.7 Exemples. Soit U un ouvert connexe du plan.
1– Soit $D(x,r)$ un disque contenu dans U. Alors $U \setminus D(x,r)$ est connexe. Pour voir cela, notons que $d(D(x,r), \mathbf{R}^2 \setminus U)$ est strictement positive (éventuellement infinie). Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $D(x, r+\varepsilon) \subset U$; on procède alors comme dans ce dessin ci-dessous :



2– si S est un segment de droite contenu dans U, alors $U \setminus S$ est connexe (la démonstration est laissée en exercice).

Une propriété simple souvent utilisée dans la suite :

1.8 Proposition. *Soit A une partie bornée du plan. Alors $\mathbf{R}^2 \setminus A$ a une seule composante connexe non bornée.*



Démonstration. Soient C une composante connexe non bornée de $\mathbf{R}^2 \setminus A$ et soit D un disque assez grand pour contenir A. Clairement, $\mathbf{R}^2 \setminus D$ est connexe et rencontre C et ainsi $\mathbf{R}^2 \setminus D$ est contenu dans C, ce qui prouve que C est unique. □

1.9 Soit A une partie de l'espace topologique X et soient a et b deux points de $X \setminus A$. On dit que A *sépare* a et b si ces deux points ne sont pas dans la même composante connexe de $X \setminus A$. On dit aussi que a et b sont *séparés par* A. Notons que si A est, par exemple, un fermé du plan, il revient au même de dire que tout chemin qui joint a à b rencontre A.

1.10 Pour terminer signalons la propriété suivante : soit X un espace topologique connexe par arcs et séparé. Alors, pour tout couple a, b de points distincts de X il existe un *chemin injectif* $\alpha : I \to X$, tel que $\alpha(0) = a, \alpha(1) = b$. Ainsi, deux points distincts d'un ouvert connexe du plan peuvent être joints par un *arc de Jordan*, c'est-à-dire une partie du plan homéomorphe à I.

2 La sphère S^2 et le plan projectif $\mathbf{P}^2$

2.1 La sphère de dimension 2, soit S^2, est l'ensemble des points de l'espace $\mathbf{R}^3$ de norme 1 (norme euclidienne).
Plus généralement, pour $n \geq 0$, $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1},\ \|x\| = 1\}$. Ainsi $S^0 = \{-1, +1\} \subset \mathbf{R}$, S^1 est "le cercle" ; mais parfois dans cet ouvrage il nous arrivera d'identifier $\mathbf{R}^2$ avec l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes et donc de regarder le cercle comme l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$S^1 = \{z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\}$$

La sphère et le plan – plus généralement S^n et $\mathbf{R}^n$ – sont des objets proches du point de vue de la topologie : S^2 s'obtient de $\mathbf{R}^2$ par adjonction d'un point à l'infini. Plus précisément :

2.2 La projection stéréographique. On identifie $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{R}^2 \times 0 \subset \mathbf{R}^3$ et on considère l'application[5]

$$\varphi : S^2 \setminus a \to \mathbf{R}^2, \quad \varphi(v) = \frac{1}{1-z}(x, y) \quad \text{pour tout } v = (x, y, z) \in S^2 \setminus a$$

avec $a = (0, 0, 1)$. On vérifie facilement que φ est continue et bijective et que son inverse $\varphi^{-1} : \mathbf{R}^2 \to S^2 \setminus a$ est donné par :

$$\varphi^{-1}(w) = \frac{1}{1 + \|w\|^2}(2w, \|w\|^2 - 1) \quad \text{pour tout } w \in \mathbf{R}^2$$

[5]Les puristes écrivent $S^2 \setminus \{a\}$ au lieu de $S^2 \setminus a$.

Ainsi φ est un homéomorphisme[6] : c'est la *projection stéréographique de pôle* a. Notons que $\|\varphi(v)\|$ tend vers $+\infty$ lorsque v tend vers a.

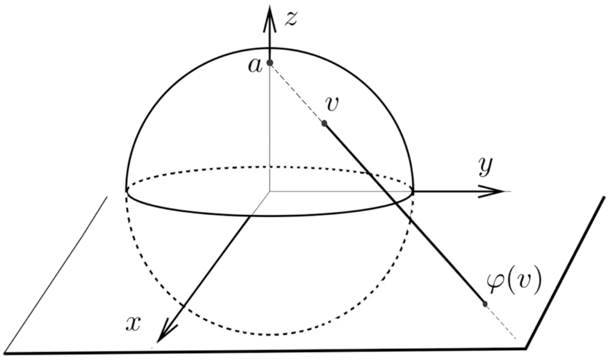


FIGURE I.3 – La droite qui joint a à v rencontre le plan en $\varphi(v)$.

Une variante consiste à projeter $S^2 \setminus a$ sur $\mathbf{R}^2 \times -1$ comme on le voit sur la figure ci-dessous.

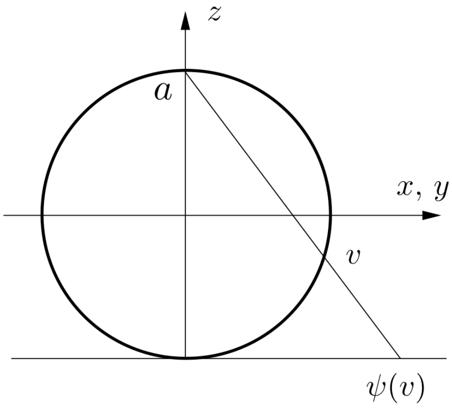


FIGURE I.4 – Variante de la projection stéréographique.

2.3 Le plan projectif, la droite projective. Le plan projectif, noté $\mathbf{P}^2$, est le quotient de la sphère S^2 par la relation qui identifie les points diamétralement opposés. Plus généralement et plus formellement, l'espace projectif de dimension n est $\mathbf{P}^n = S^n / \sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence suivante :

[6] La formule précédente se généralise à S^n, $n \geq 1$.

$v \sim v'$ si $v = v'$ ou $v = -v'$. L'espace projectif est muni de la *topologie quotient* , c'est-à-dire qu'une partie U de $\mathbf{P}^n$ est un ouvert si et seulement si $p^{-1}(U)$ est un ouvert de S^n, $p : S^n \to \mathbf{P}^n$ étant la projection canonique. Les $\mathbf{P}^n$ sont des espaces séparés et clairement compacts (car images du compact S^n par la projection canonique).
On peut voir aussi $\mathbf{P}^n$ comme l'espace des droites vectorielles de $\mathbf{R}^{n+1}$; plus précisément $\mathbf{P}^n = (\mathbf{R}^{n+1} \setminus 0)/ \backsim$ où $\backsim$ est la relation d'équivalence ainsi définie : $v \backsim w$ s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $v = \lambda w$; autrement dit, les points de $\mathbf{P}^n$ sont les droites de $\mathbf{R}^{n+1}$ privées de l'origine.
On démontre aisément que l'espace $\mathbf{P}^1$, appelé *la droite projective*, est homéomorphe au cercle ; en fait, il existe une application continue $h : P^1 \to S^1$ telle que $h \circ p : S^1 \to S^1$ soit l'élévation au carré ($h \circ p(z) = z^2$ pour tout z) ; on vérifie facilement que h est un homéomorphisme. L'existence de h est due à cette caractérisation de la topologie quotient :

2.4 Théorème. *Soient X un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. Alors, $X/\sim$ étant muni de la topologie quotient, pour toute application continue $f : X \to Y$ compatible avec $\sim$ (c'est-à-dire telle que $x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y)$), il existe une unique application continue $\overline{f} : X/{\sim} \to Y$ telle que $f = \overline{f} \circ p$ (où $p : X \to X/{\sim}$ est l'application canonique).*

Démonstration. Par définition de la topologie quotient, U est un ouvert de $X/\sim$ si et seulement si $p^{-1}(U)$ est un ouvert de X. $\square$

2.5 Voici une application simple et utile du théorème ci-dessus. Soit $\sim$ la relation d'équivalence qui identifie les extrémités de I, autrement dit

$$t \sim s \quad \text{si } t = s \text{ ou si } \ |t - s| = 1$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\mathrm{Exp}"] \arrow[d, "p"'] & S^1 \\ I/\sim \arrow[ur, "\widetilde{\mathrm{Exp}}"'] & \end{tikzcd}$$

L'application exponentielle $\mathrm{Exp} : \mathrm{I} \to \mathrm{S}^1$, $t \mapsto e^{2i\pi t}$, est clairement compatible avec $\sim$; il existe donc $\widetilde{\mathrm{Exp}} : I/\sim \to S^1$ telle que $\widetilde{\mathrm{Exp}} \circ p = \mathrm{Exp}$. Il est maintenant très facile de vérifier que $\widetilde{\mathrm{Exp}}$ est un homéomorphisme.