Chapitre 1

CARRÉS

I. Énoncés

1. Trois carrés pour le prix d'un

49 est un carré à deux chiffres. Si on le découpe en deux nombres 4 et 9, on obtient deux carrés à un chiffre. 49 est le seul carré à deux chiffres possédant cette particularité.

🔒 Trouver l'unique carré à quatre chiffres tel que ses deux premiers chiffres et ses deux derniers représentent deux carrés à deux chiffres.

2. Carré formé de deux nombres consécutifs

183 184 est le carré à six chiffres de 428. On remarque que ses trois premiers chiffres et ses trois derniers forment deux nombres consécutifs 183 et 184.

🔒 Trouver l'unique carré à huit chiffres tel que ses quatre premiers chiffres et ses quatre derniers représentent deux nombres consécutifs.

3. Tous les chiffres sauf zéro

Le carré de 567 est égal à 321 489. Si on réunit les chiffres de 567 et de 321 489, on obtient exactement tous les chiffres de 1 à 9.

🔒 Trouver l'autre nombre entier tel que chaque chiffre excepté zéro apparaisse une seule fois dans ce nombre et son carré.

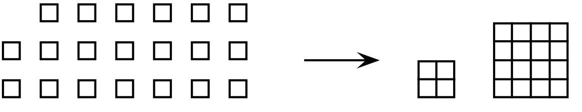
4. Carré dans les deux sens

1089 est le carré de 33. En écrivant les chiffres de 1089 dans l'autre sens, on obtient le nombre 9801. Il se trouve que 9801 est aussi un carré puisque $9801 = 99^2$. 1089 et 9801 sont les deux seuls carrés à quatre chiffres ayant cette propriété.

🔒 Trouver les deux carrés à huit chiffres tels que si on les écrit dans l'autre sens, alors on forme aussi deux carrés à huit chiffres.

5. Deux mille dix-huit petits carrés

Certains nombres entiers sont égaux à la somme de deux carrés. C'est le cas de 2 égal à $1^2 + 1^2$, de 4 égal à $2^2 + 0^2$ ou encore de 20 égal à $4^2 + 2^2$. Lorsqu'on dispose de vingt petits carrés identiques, on peut donc les assembler pour former exactement deux carrés complets.



Vingt petits carrés — Deux carrés complets

En revanche, d'autres entiers ne sont pas égaux à la somme de deux carrés. C'est le cas de 3, 7 et 11.

🔒 Le nombre 2018 est-il égal à la somme de deux carrés ? Autrement dit, disposant de 2018 petits carrés identiques, peut-on les regrouper pour former deux carrés complets ?

6. Deux lignes et trois colonnes de carrés

Les nombres 576 et 289 sont deux carrés à trois chiffres. En effet, $576 = 24^2$ et $289 = 17^2$. Si on les écrit l'un en dessous de l'autre et si on lit les chiffres verticalement, alors on ne forme pas trois carrés à deux chiffres. 52, 78 et 69 ne sont pas des carrés.

$$\begin{matrix}5 & 7 & 6\\ 2 & 8 & 9\end{matrix}$$

Trouver les deux carrés à trois chiffres tels que si on les écrit l'un en dessous de l'autre et si on lit les chiffres verticalement, alors on forme encore trois carrés à deux chiffres.

7. Carré palindrome

121 est le carré de 11. De plus, si on écrit 121 dans l'autre sens, on obtient le même nombre. On dit que 121 est un carré palindrome.

Trouver l'unique carré palindrome à six chiffres.

8. Triplet pythagoricien

On rappelle que dans un triangle, si le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors le triangle est rectangle. Il s'agit de la réciproque du théorème de Pythagore. On a $5^2 = 25$ et $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ donc un triangle dont les côtés mesurent 5, 4 et 3 est rectangle. On dit que c'est un triangle pythagoricien et que (5,4,3) est un triplet pythagoricien. (13,12,5) et (17,15,8) sont également des triplets pythagoriciens.

Existe-t-il un triangle pythagoricien dont l'hypoténuse mesure 2018 ?

9. Le carré qui bégaie

Trouver l'unique carré à quatre chiffres tel que ses deux premiers chiffres soient identiques et ses deux derniers aussi.

10. L'hypoténuse féconde

Il existe seulement deux triangles pythagoriciens dont l'hypoténuse mesure 100. Ils correspondent aux triplets pythagoriciens suivants :

$$(100, 96, 28) \text{ et } (100, 80, 60).$$

🔒 Quelle est la plus petite longueur de l'hypoténuse strictement inférieure à 100 qui donne naissance au plus grand nombre de triangles pythagoriciens ?

11. Le carré aux neuf chiffres

139 854 276 est le carré de 11 826. Il s'agit du plus petit carré constitué des neufs chiffres de un à neuf.

🔒 Trouver le plus grand carré formé avec les neuf chiffres de un à neuf.

12. Le général superstitieux

Avant la grande bataille, un général observe du haut de la colline son armée répartie sur la plaine en treize carrés parfaits identiques. Très superstitieux, il décide de descendre dans l'arène et il dissout ces treize carrés. Accompagné de tous ses soldats, il réussit à reformer un seul carré parfait avant de livrer bataille.

🔒 Quel est le plus petit nombre de soldats que peut compter cette armée ?

13. Les boulets de canon

Un artilleur dispose de boulets de canon répartis dans un carré parfait. Pour réduire l'encombrement au sol, l'artilleur réussit à empiler ses boulets pour former une belle pyramide à base carrée.

🔒 Quel est le plus petit nombre de boulets possible dont dispose l'artilleur ?

14. Les carrés de l'officier

Un officier dispose ses hommes en un carré le plus grand possible, mais il a 39 soldats en trop. Il décide d'augmenter de un le nombre d'hommes sur le côté du carré. Il lui manque alors 50 hommes pour terminer le carré.

🔒 Quel est le nombre d'hommes sous les ordres de cet officier ?

15. Un carré qui commence par quatre chiffres deux

Le plus petit carré qui débute par un seul chiffre deux est $25 = 5^2$, par deux chiffres deux $225 = 15^2$ et par trois chiffres deux $22\,201 = 149^2$.

🔒 Trouver le plus petit carré qui commence par quatre chiffres deux.

16. Somme de quatre carrés

Un théorème, conjecturé en 1621 par le mathématicien Bachet de Méziriac puis démontré en 1770 par le mathématicien français Joseph Louis Lagrange, affirme que n'importe quel nombre entier peut s'écrire comme la somme de quatre carrés. On le vérifie par exemple pour le nombre 31, égal à $5^2+2^2+1^2+1^2$ ou encore 43, égal à $5^2+3^2+3^2+0^2$. En général, cette décomposition n'est pas unique. Par exemple, le nombre 53 est égal à $7^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2$, mais aussi à $6^2 + 4^2 + 1^2 + 0^2$.

🔒 Combien 1770 compte-t-il de décompositions en somme de quatre carrés ?

17. Carrément voisins

Disposons en ligne les nombres entiers de 1 à 15 de la façon suivante :

2 14 11 5 8 12 6 3 1 9 7 13 5 4 10 15

On remarque que la somme du premier et du deuxième nombre est un carré parfait ($2+14 = 16$). Il en est de même pour la somme du deuxième et du troisième ($14 + 11 = 25$), pour la somme du troisième et du quatrième ($11 + 5 = 16$) mais pas pour la somme du quatrième et du cinquième ($5 + 8 = 13$).

🔒 Arranger en ligne les quinze nombres entiers de 1 à 15 de telle sorte que la somme de deux nombres voisins soit toujours un carré parfait.

II. Solutions

1. Trois carrés pour le prix d'un

Sachant que $4^2 = 16$ est le plus petit carré à deux chiffres et $9^2 = 81$ le plus grand, on construit la liste `l2` des carrés à deux chiffres (ligne 1) et comme $32^2 = 1024$ est le plus petit carré à quatre chiffres et $99^2 = 9801$ le plus grand, on crée aussi la liste `l4` des carrés à quatre chiffres (ligne 2). Puis, pour chaque carré à quatre chiffres `c`, `n1` contient le nombre formé à partir de ses deux premiers chiffres et `n2` celui formé à partir de ses deux derniers (ligne 5). On teste si ces deux nombres sont des carrés à deux chiffres. Si tel est le cas, on affiche le carré à quatre chiffres correspondant qui est la solution du problème (ligne 6).

Script 1 – Trois carrés pour le prix d'un

```
1 l2=[n**2 for n in range (4,10)]
2 l4=[n**2 for n in range (32,100)]
3
4 for c in l4:
5     n1,n2=c//100,c%100
6     if n1 in l2 and n2 in l2: print(c)
```

L'unique carré à quatre chiffres tel que ses deux premiers chiffres et ses deux derniers représentent deux carrés à deux chiffres est 1681. On vérifie que 1681 est le carré de 41 et que 16 et 81 sont les carrés de 4 et 9.

2. Carré formé de deux nombres consécutifs

Sachant que $3163^2 = 10\,004\,569$ est le plus petit carré à huit chiffres et $9999^2 = 99\,980\,001$ le plus grand, on construit la liste `l8` des carrés à huit chiffres (ligne 1). Puis, pour chaque carré à huit chiffres `c`, `n1` contient le nombre formé à partir de ses quatre premiers chiffres et `n2` celui formé à partir de ses quatre derniers (ligne 4). On teste si ces deux nombres sont consécutifs. Si tel est le cas, on affiche le carré à huit chiffres correspondant qui est la solution du problème (ligne 5).

Script 2 – Carré formé de deux nombres consécutifs

```
l8=[n**2 for n in range (3163,10000)]

for c in l8:
    n1,n2=c//10000,c%10000
    if n2==n1+1: print(c)
```

L'unique carré à huit chiffres tel que ses quatre premiers chiffres et ses quatre derniers chiffres représentent deux nombres consécutifs est 60 996 100. On vérifie que 60 996 100 est le carré de 7810 et que 6099 et 6100 sont deux nombres consécutifs.

3. Tous les chiffres sauf zéro

D'une part, la fonction `lc()` renvoie la liste des chiffres d'un entier `n`. D'autre part, sachant que le carré d'un nombre à deux chiffres possède au maximum quatre chiffres ($99^2 = 9801$) et que le carré d'un nombre à quatre chiffres possède au minimum sept chiffres, on doit chercher la solution parmi les nombres à trois chiffres. Par conséquent, pour chaque entier `n` à trois chiffres (ligne 5), on construit la liste `l1` des chiffres de `n` et la liste `l2` des chiffres de $\mathtt{n}^2$ (ligne 6). On ordonne tous ces chiffres dans la liste `l3` (ligne 7). Si cette dernière correspond exactement à la liste `l9c` des neuf chiffres de 1 à 9, alors on affiche le nombre `n` (ligne 8).

Script 3 – Tous les chiffres sauf zéro

```
1 def lc(n):
2     return [int(c) for c in str(n)]
3 
4 l9c=[1,2,3,4,5,6,7,8,9]
5 for n in range (100,1000):
6     l1,l2=lc(n),lc(n**2)
7     l3=sorted(l1+l2)
8     if l3==l9c: print(n)
```

Le programme affiche 567 et 854. On vérifie que $854^2 = 729\,316$ et que les nombres 854 et 729 316 contiennent bien tous les chiffres de 1 à 9.

4. Carré dans les deux sens

Sachant que $3163^2 = 10\,004\,569$ est le plus petit carré à huit chiffres et $9999^2 = 99\,980\,001$ le plus grand, on construit d'abord la liste `l8` des carrés à huit chiffres (ligne 1). Puis, pour chaque carré `c8` de cette liste, on détermine la liste de ses chiffres `lc` (ligne 4). À partir de cette liste, on construit le nombre écrit dans l'autre sens `inv` (ligne 5) et on teste si ce nombre est un carré à huit chiffres. Si tel est le cas, on affiche le carré `c8` (ligne 6).

Script 4 – Carré dans les deux sens

```
1 l8=[n**2 for n in range(3163,10000)]
2
3 for c8 in l8:
4     lc=[int(c) for c in str(c8)]
5     inv=sum([lc[i]*10**i for i in range(0,8)])
6     if inv in l8: print(c8)
```

Les deux carrés à huit chiffres, tels que si on les écrit dans l'autre sens alors on forme aussi deux carrés à huit chiffres, sont 10 036 224 et 42 263 001. On vérifie que 10 036 224 est le carré de 3168, 42 263 001 le carré de 6501 et que les chiffres de 42 263 001 sont les mêmes que ceux de 10 036 224 mais écrits dans l'autre sens.

5. Deux mille dix-huit petits carrés

Notons $x^2 + y^2$ (avec $y \leqslant x$) la somme de deux carrés. La partie entière de $\sqrt{2018}$ étant 44, l'entier x est nécessairement inférieur ou égal à 44. Donc, pour chaque couple d'entiers x et y tels que $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 44$ (lignes 1 et 2), on calcule $x^2 + y^2$ et on teste si le résultat est égal à 2018 (ligne 3). Si tel est le cas, on affiche x et y (ligne 4).