X 2011-MP
épreuve A

Durée : 4 heures

Valeurs singulières d'une matrice et inégalités de trace

Notations et conventions

Dans ce problème l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est muni du produit scalaire hermitien usuel noté $\langle .,. \rangle$; on rappelle qu'il est linéaire à droite, semi-linéaire à gauche et que la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ est orthonormale. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients complexes qu'on identifie à l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne d'une matrice A est noté $A_{i,j}$. On note A^*, appelée adjointe de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice définie pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$ par $A^*_{i,j} = \overline{A_{j,i}}$.
On définit les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ suivants :

$\mathcal{H}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ A^* = A\}$

$\mathcal{H}_n^+ = \{A \in \mathcal{H}_n \ / \ \forall\, x \in \mathbb{C}^n, \langle x, Ax \rangle \geqslant 0\}$

$\mathcal{U}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n, \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle\}$

$\mathcal{N}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ AA^* = A^*A\}$

$\mathcal{D}_n$ désigne l'ensemble des matrices diagonales dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Enfin, pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{C}^n$, $F^\perp$ désigne le sous-espace orthogonal pour le produit hermitien usuel.

Le problème a pour but l'étude de quelques inégalités de traces sur les matrices carrées à coefficients complexes via l'introduction de la décomposition en valeurs singulières et le calcul de la distance minimale pour la norme de Frobenius entre deux matrices de $\mathcal{H}_n$ définies à équivalence près par des changements de bases dans $\mathcal{U}_n$.

Première partie : étude de $\mathcal{N}_n$

1°) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout couple (x, y) de vecteurs de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$: $\langle A^*x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$.

2°) a) Montrer que $A \in \mathcal{U}_n$ si et seulement si $A^*A = AA^* = I_n$.

b) Montrer que $A \in \mathcal{U}_n$ si et seulement si les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

3°) a) Montrer que si $A \in \mathcal{N}_n$, $A((\operatorname{Ker} A)^\perp) \subset (\operatorname{Ker} A)^\perp$. En déduire que si λ est une valeur propre de A et si E_λ est le sous-espace propre associé, alors $A(E_\lambda^\perp) \subset E_\lambda^\perp$.

b) En déduire que $\mathcal{N}_n = \{UDU^*, U \in \mathcal{U}_n, D \in \mathcal{D}_n\}$.

4°) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les racines du polynôme caractéristique (non nécessairement distinctes) de A.

Montrer que si $A \in \mathcal{N}_n$, alors $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |A_{i,j}|^2$. (On pourra calculer la trace de AA^*.)

5°) a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $A \in \mathcal{N}_n$, alors A et A^* ont le même noyau.

b) Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $A \in \mathcal{N}_n$.
(ii) Tout vecteur propre de A est vecteur propre de son adjointe A^*.
Pour $(ii) \implies (i)$, on pourra procéder par récurrence sur la dimension n et pour un vecteur propre x de A considérer l'orthogonal de l'espace vectoriel engendré par x.

6°) a) Prouver que si la matrice A appartient à $\mathcal{N}_n$, son adjointe A^* peut s'écrire comme un polynôme en A à coefficients complexes. (On pourra utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange).

b) Prouver que si A et B sont dans $\mathcal{N}_n$ et commutent, alors $AB \in \mathcal{N}_n$.

7°) Prouver que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $A \in \mathcal{N}_n$.
(ii) Il existe une matrice $U \in \mathcal{U}_n$ commutant avec A telle que $A^* = AU$.
On pourra construire U à partir des valeurs propres de A et raisonner dans une base orthonormale bien choisie.

Deuxième partie : valeurs singulières d'une matrice

8°) Montrer que $A \in \mathcal{H}_n$ (resp. $\mathcal{H}_n^+$) si et seulement si A est diagonalisable dans une base orthonormale et ses valeurs propres sont réelles (resp. réelles positives).

9°) Montrer que si $A \in \mathcal{H}_n^+$ il existe une unique matrice $S \in \mathcal{H}_n^+$ telle que $S^2 = A$. (Pour l'unicité, on pourra se ramener au cas où A est un multiple de l'identité en considérant les sous-espaces propres de A.)

Si S est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que $A = US$ est une décomposition polaire de A si $S \in \mathcal{H}_n^+$ et $U \in \mathcal{U}_n$. Dans la suite du problème, on admettra l'existence d'une décomposition polaire pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on dit que $A = UDW$ est une décomposition en valeurs singulières de A si $U, W \in \mathcal{U}_n$ et $D \in \mathcal{D}_n$ est à coefficients réels positifs ou nuls.

10°) Prouver que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une décomposition en valeurs singulières. (On pourra commencer par écrire une décomposition polaire de A.)

11°) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une décomposition en valeurs singulières de A pour laquelle les coefficients diagonaux $\alpha_i = D_{i,i}$ de D vérifient $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$ et que ces coefficients sont alors déterminés de façon unique. On les appellera les valeurs singulières de A.

Troisième partie : inégalités de traces

12°) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice vérifiant

$$(\mathcal{P}_k) \quad P^2 = P = P^*, \text{rang } P = k$$

a) Montrer que les coefficients de P vérifient :

(i) $0 \leqslant P_{i,i} \leqslant 1$ pour tout entier i entre 1 et n,

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} P_{i,i} = k$.

b) Soit $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ des réels et D la matrice diagonale telle que $D_{i,i} = \lambda_i$ pour tout entier i entre 1 et n. Montrer que $\operatorname{tr}(PD) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$.

Trouver une matrice P vérifiant les conditions $(\mathcal{P}_k)$ telle que $\operatorname{tr}(PD) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$.

c) Montrer que si P_1, P_2 sont deux matrices vérifiant les conditions $(\mathcal{P}_k)$, il existe $U \in \mathcal{U}_n$ telle que $P_2 = UP_1U^*$.

En déduire que $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = \max\limits_{U \in \mathcal{U}_n} \operatorname{tr}(UPU^*D)$ où P est une matrice vérifiant $(\mathcal{P}_k)$.

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est doublement stochastique si A est à coefficients réels positifs et vérifie $\sum\limits_{i=1}^{n} A_{i,k} = 1$ et $\sum\limits_{j=1}^{n} A_{k,j} = 1$, pour tout entier k compris entre 1 et n. On note $\mathcal{DS}_n$ l'ensemble des matrices doublement stochastiques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

13°) Montrer que si $U \in \mathcal{U}_n$, la matrice dont les coefficients sont les $|U_{i,j}|^2$ est doublement stochastique.

14°) Soit A une matrice doublement stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soient

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n, \quad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n$$

des réels. On suppose que A n'est pas la matrice identité I_n et on note k le plus petit entier tel que $A_{k,k} \neq 1$.

a) Montrer qu'il existe deux entiers m et ℓ vérifiant $k < m \leqslant n, k < \ell \leqslant n$ et tels que $A_{m,k} \neq 0$, $A_{k,\ell} \neq 0$, $A_{m,\ell} \neq 1$

b) Construire une matrice doublement stochastique A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant :

(i) $A'_{i,j} = A_{i,j}$ si $(i,j) \notin \{(k,k),(m,k),(k,\ell),(m,\ell)\}$,

(ii) $A'_{m,k}$ ou $A'_{k,\ell}$ est nul,

(iii) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A'_{i,j}\alpha_i\beta_j \geqslant \sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\alpha_i\beta_j$

En déduire que $\max\limits_{A \in \mathcal{DS}_n} \sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\alpha_i\beta_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$.

15°) Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Soit D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\alpha_i = D_{i,i}$ sont les valeurs singulières de A et soit T la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\beta_i = T_{i,i}$ sont les valeurs singulières de B telles que

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n, \quad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n$$

Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{U}_n$ telles que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(UDVT)$.

b) Montrer que $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i,j=1}^{n} U_{i,j} V_{j,i} \alpha_j \beta_i$ et en déduire que

$$|\operatorname{tr}(AB)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

c) Soient A, B dans $\mathcal{H}_n^+$. Montrer que $|\operatorname{tr}(AB)| \leqslant \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

16°) Soient A et B dans $\mathcal{H}_n$ et soient

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n, \quad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n$$

leurs valeurs propres.

Montrer que : $\min\limits_{U \in \mathcal{U}_n} \|A - U^*BU\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)^2}$, où la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est donnée par $\|A\|^2 = \operatorname{tr}(A^*A)$. On pourra commencer par déterminer $\max\limits_{U \in \mathcal{U}_n} \operatorname{tr}(AU^*BU)$

Solution

On a $A^* = {}^t\overline{A}$ et les rappels faits au début du texte de cette épreuve (semi-linéarité **à gauche** ...) signifient que si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$, alors on a : $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k y_k$.

Si X et Y sont les matrices colonnes canoniquement associées à ces vecteurs, on a donc également : $\langle x, y \rangle = {}^t\overline{X}Y$. L'énoncé précise que l'on confondra matrice carrée et endomorphisme, donc dans la foulée on pourra confondre vecteur et matrice colonne canoniquement associée. Ainsi :

$$\langle x, y \rangle = {}^t\overline{x}y$$

Première partie

Question 1.

Comme ${}^{tt}M = M$, $\overline{\overline{M}} = M$, et ${}^t\overline{M} = \overline{{}^tM}$, on a : $A^{**} = {}^t\overline{A^*} = {}^t\overline{({}^t\overline{A})} = A$ et puisque $\overline{MN} = \overline{M}\,\overline{N}$, pour tous vecteurs x et y :

$$\boxed{\langle A^*x, y \rangle = {}^t(\overline{A^*x})y = {}^t\overline{x}A^{**}y = {}^t\overline{x}AY = \langle x, Ay \rangle}$$

Tant que l'on est dans les banalités opératoires, notons que les propriétés de la conjugaison et de la transposition donnent, pour toutes matrices et tout scalaire :

$$(A + \lambda B)^* = A^* + \overline{\lambda}B^* : (AB)^* = B^*A^*$$

Question 2.

a) $\star$ Si $A \in \mathcal{U}_n$, on a : $\forall\, x, y \in \mathbb{C}^n$, $\langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = \langle A^*(Ax), y \rangle$, donc :

$$\forall\, y \in \mathbb{C}^n, \langle x - A^*Ax, y \rangle = 0$$

Ainsi $(I - A^*A)x$ est orthogonal à $\mathbb{C}^n$ et à ce titre est le vecteur nul. De plus, ceci étant vrai pour tout x, on a bien $I = A^*A$ (et on sait qu'il est alors inutile de calculer AA^*)

$\star$ Réciproquement si $A^*A = I$, alors on a :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{C}^n, \langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*Ax, y\rangle = \langle x, y\rangle \text{ et } A \in \mathcal{U}_n.$$

Bref :

$$\boxed{A \in \mathcal{U}_n \Longleftrightarrow A^*A = I\ (= AA^*)}$$

b) Soient $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A, alors les lignes de A^* sont ${}^t\overline{C_1}, \ldots, {}^t\overline{C_n}$ et un calcul par blocs donne :

$$(A^*A)_{i,j} = {}^t\overline{C_i}C_j$$

et puisque $A^*A = I$, cele s'écrit, en utilisant le symbole de Kronecker :

$$\langle C_i, C_j\rangle = \delta_{i,j}$$

Ce qui prouve que $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$, muni de son produit scalaire hermitien canonique.

Notons que tout ceci permet d'affirmer que $\mathcal{U}_n$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

Question 3.

a) $\star$ Soit $A \in \mathcal{N}_n$ et $x \in A((\operatorname{Ker} A)^\perp)$. Il existe donc $y \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$ tel que $x = Ay$ et il s'agit de prouver que x est dans $(\operatorname{Ker} A)^\perp$, donc que pour tout $z \in \operatorname{Ker} A$, on a $\langle x, z\rangle = 0$.

Or, $z \in \operatorname{Ker} A \implies Az = 0 \implies A^*Az = 0 \implies AA^*z = 0$ (car A commute avec A^*)

Donc $A^*z \in \operatorname{Ker} A$ et $y \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$, ce qui s'écrit $\langle y, A^*z\rangle = 0$, ou encore $\langle Ay, z\rangle = 0$, *i.e.* $\langle x, z\rangle = 0$; ce qu'il fallait.

$$\boxed{A \in \mathcal{N}_n \implies A((\operatorname{Ker} A)^\perp) \subset (\operatorname{Ker} A)^\perp}$$

$\star$ Soit alors $\lambda \in \operatorname{Spec} A$ et $E_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ le sous-espace propre de A associé. Comme $A \in \mathcal{U}_n$, A commute avec son adjoint A^* et comme I commute avec tout le monde, $A - \lambda I$ commute avec $(A - \lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$. Ainsi $A - \lambda I \in \mathcal{U}_n$ et par le résultat précédent :

$$(A - \lambda I)(E_\lambda^\perp) \subset E_\lambda^\perp$$

Donc $x \in E_\lambda^\perp \implies (A - \lambda I)x = Ax - \lambda x \in E_\lambda^\perp$ et comme $\lambda x \in E_\lambda^\perp$, il vient $Ax \in E_\lambda^\perp$, donc :

$$\boxed{A(E_\lambda^\perp) \subset E_\lambda^\perp}$$

b) Il s'agit de montrer que A appartient à $\mathcal{N}_n$ si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale, avec une matrice de changement de base appartenant à $\mathcal{U}_n$, donc qui est une matrice de changement de base orthonormée … Cela ne vous rappelle rien ?

$\star$ Si A est de la forme $A = UDU^*$, avec $U \in \mathcal{U}_n$ et $D \in \mathcal{D}_n$, alors :

$AA^* = (UDU^*)(UDU^*)^* = UDU^*U^{**}D^*U^* = UDU^*UD^*U^* = UDD^*U^*$

$A^*A = (UDU^*)^*(UDU^*) = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^*$

Et comme les matrices diagonales commutent entre elles, on a $DD^* = D^*D$ et donc $AA^* = A^*A$, soit $A \in \mathcal{N}_n$.

$\star$ Pour la réciproque, raisonnons par récurrence sur n.

$\rightarrow$ Pour $n = 1$, les problèmes de diagonalisabilité ne se posent pas vraiment.

$\rightarrow$ Soit $n > 1$, supposons le résultat demandé acquis pour toute matrice de $\mathcal{N}_k$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et considérons $A \in \mathcal{N}_n$.

Soit λ une valeur propre de A (il en existe au moins une, puisque l'on travaille dans $\mathbb{C}$) et E_λ le sous-espace propre associé.

• Si on a $\dim E_\lambda = n$, alors $A = \lambda I_n$ et on peut écrire :

$$A = I_n.\lambda I_n.I_n^*, \text{ avec } \lambda I_n \in \mathcal{D}_n \text{ et } I_n \in \mathcal{U}_n : \text{fin !}$$

• Sinon $\dim E_\lambda = n - k < n$. Soit alors $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_{n-k}, \ldots, e'_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ obtenue par concaténation d'une base orthonormée $(e'_1, \ldots, e'_{n-k})$ de E_λ et d'une base orthonormée de $E_\lambda^\perp$ et P_1 la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. La matrice P_1 appartient à $\mathcal{U}_n$ (résultat **2°) b)**) et comme $E_\lambda^\perp$ est stable par A (résultat **3°) a)**), on a :

$$A' = P_1^{-1}AP_1 = P_1^*AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda I_{n-k} & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

[C'est la stabilité de $E_\lambda^\perp$ par A qui justifie la présence du bloc nul en haut à droite.]

D'autre part, par blocs : $A'^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda} I_{n-k} & 0 \\ 0 & B'^* \end{pmatrix}$ et la relation $AA^* = A^*A$ équivaut, par les calculs habituels de similitude, à la relation $A'A'^* = A'^*A'$.
On a donc, toujours par blocs, $B'B'^* = B'^*B'$ et $B' \in \mathcal{N}_k$.

L'hypothèse de récurrence montre alors qu'il existe une matrice $P' \in \mathcal{U}_k$ et une matrice diagonale D' telles que $B' = P'D'P'^*$, soit $P'^*B'P' = D'$.

La matrice $P_2 = \begin{pmatrix} I_{n-k} & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$ est alors une matrice de $\mathcal{U}_n$ et encore par blocs :

$$P_2^*A'P_2 = \begin{pmatrix} \lambda I_{n-k} & 0 \\ 0 & P'^*B'P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_{n-k} & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n$$

Finalement $D = P_2^*P_1^*AP_1P_2 = (P_1P_2)^*AP_1P_2 \in \mathcal{D}_n$ et $P = P_1P_2$ est produit de deux matrices de changement de base orthonormée donc appartient encore à $\mathcal{U}_n$, ce qui prouve que $A = PDP^*$ est de la forme espérée et donne la propriété voulue au rang n.
On conclut alors par le principe de récurrence :
$A \in \mathcal{N}_n$ si et seulement si A est de la forme UDU^* avec $U \in \mathcal{U}_n$ et $D \in \mathcal{D}_n$:

$$\boxed{\mathcal{N}_n = \{UDU^*, U \in \mathcal{U}_n, D \in \mathcal{D}_n\}}$$

[Ce raisonnement peut paraître un peu tordu, mais ce n'est pas de notre faute si l'énoncé a dit qu'il fallait confondre endomorphisme et matrice canoniquement associée : comment doit-on alors noter un endomorphisme dans une autre base ou sa restriction à un sous-espace stable ? On est contraint de n'utiliser que des écritures matricielles et à traduire les changements de bases par les formules de similitude ! La prochaine fois, nous ferons autrement . . .]

Question 4.

L'énoncé dit que l'on peut faire des calculs de trace, alors on le suit à la ... :

$\star \, \forall i \in [\![1,n]\!], (AA^*)_{i,i} = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{i,j}A^*_{j,i} = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{i,j}\overline{A_{i,j}} = \sum\limits_{j=1}^{n} |A_{i,j}|^2$, et :

$$\mathrm{tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^{n} (AA^*)_{i,i} = \sum_{i,j} |A_{i,j}|^2$$

Maintenant, si on suppose que $A \in \mathcal{N}_n$, le résultat **3°) b)** permet d'écrire $A = UDU^*$, avec $U \in \mathcal{U}_n$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A (répétées selon leurs ordres de multiplicités respectifs ce qui semble implicite dans l'énoncé qui parle maladroitement de valeurs propres non nécessairement distinctes).

Alors, comme on sait que pour toutes matrices carrées $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$, il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AA^*) &= \mathrm{tr}((UDD^*)U^*) = \mathrm{tr}(U^*(UDD^*)) = \mathrm{tr}(DD^*)\\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{diag}(\lambda_1\overline{\lambda}_1, \ldots, \lambda_n\overline{\lambda}_n)) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\end{aligned}$$

Soit, en comparant et en regrettant que l'énoncé utilise l'indice i (et aussi d'ailleurs l'indice j) lorsqu'il s'agit de complexes :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |A_{i,j}|^2}$$

Question 5.

a) Soit $A \in \mathcal{N}_n$, on a $AA^* = A^*A$, donc pour tout vecteur x :

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle = \langle x, AA^*x\rangle = \langle A^*x, A^*x\rangle = \|A^*x\|^2$$

En particulier, $Ax = 0 \iff A^*x = 0$. Donc :

$$\boxed{A \in \mathcal{N}_n \implies \mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A^*}$$

b) $(i) \implies (ii)$.

Si $A \in \mathcal{N}_n$, A commute avec A^*, donc pour tous scalaires λ et μ, $A - \lambda I$ commute avec $A^* - \mu I$. En particulier $A - \lambda I$ commute avec $(A - \lambda I)^* = A - \overline{\lambda} I$, donc par le résultat **a)** :

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \mathrm{Ker}(A^* - \overline{\lambda} I)$$

Ceci prouve d'une part que $\lambda \in \mathrm{Spec}\, A \iff \overline{\lambda} \in \mathrm{Spec}\, A^*$ (mais c'est une banalité en termes de polynôme caractéristique), mais surtout cela montre que :

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \mathrm{Ker}(A^* - \overline{\lambda} I) = E_{\overline{\lambda}}(A^*)$$

donc A et A^* ont les mêmes vecteurs propres (et on sait comment apparier les valeurs propres).

$(ii) \implies (i)$.

[On nous demande de raisonner par récurrence en considérant un hyperplan, qui se doit d'être stable pour être intéressant, pour considérer les endomorphismes induits. Cette notion est plus agréable à manipuler en termes d'application linéaire, aussi nous abandonnons l'idée de noter de la même façon matrice et endomorphisme ...]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, f l'endomorphisme canoniquement associé à A, f^* son adjoint défini par $\forall\, x, y \in \mathbb{C}^n$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$, en remarquant que si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée quelconque, on a $M_{\mathcal{B}}(f^*) = (M_{\mathcal{B}}(f))^*$.

$\rightarrow$ Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.

$\rightarrow$ Supposons le résultat acquis en dimension $n-1$ et soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que tout vecteur propre de f soit vecteur propre de f^*.

Soit x un vecteur propre unitaire de f (il en existe au moins un) et λ la valeur propre associée. Posons $H = (\mathrm{Vect}(x))^\perp$.

L'hypothèse fait que x est vecteur propre de f^* et si on note μ la valeur propre associée, on a :

$$\forall\, y \in H, \langle f(y), x\rangle = \langle y, f^*(x)\rangle = \mu\langle y, x\rangle = 0$$
$$\forall\, y \in H, \langle f^*(y), x\rangle = \langle y, f(x)\rangle = \lambda\langle y, x\rangle = 0.$$

Ceci prouve que H est stable par f (et f^*).

Soit alors $\mathcal{B} = (x, \mathcal{B}')$, où $\mathcal{B}'$ est unebase orthonormée de H. $\mathcal{B}$ est donc une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ et :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, M_{\mathcal{B}}(f^*) = \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'^* & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Soit g l'endomorphisme de H induit par f, on a $M_{\mathcal{B}'}(g) = A'$ et $M_{\mathcal{B}'}(g^*) = A'^*$. Tout vecteur propre de g est vecteur propre de f, donc de f^* et appartient à H. Il est donc vecteur propre de $(f^*)_{|H}$ qui n'est autre que g^*.

Ainsi g vérifie la condition (ii) et g commute avec g^*, donc A' commute avec avec A'^* et un calcul par blocs banal montre alors que f commute avec f^* et $AA^* = A^*A$, donc $A \in \mathcal{N}_n$ et on a la conclusion au rang n.

On conclut par le principe de récurrence.

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, (i) \iff (ii)}$$

Question 6.

a) On a déjà remarqué que si $A \in \mathcal{N}_n$ est écrit sous la forme $A = UDU^*$, avec $U \in \mathcal{U}_n$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_p, \dots, \lambda_p)$ (où les λ_i sont les valeurs propres distinctes de A, donc répétées selon leurs ordres de multiplicité), alors :

$$A^* = UD^*U^*, \text{ avec } D^* = \mathrm{diag}(\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_p, \dots, \overline{\lambda}_p)$$

Soit L **le** polynôme de degré p tel que pour tout i, $L(\lambda_i) = \overline{\lambda}_i$ (les polynômes interpolateurs de Lagrange semblent supposés connus).

Les calculs habituels montrent que $L(D) = D^*$, puis $L(A) = A^*$.

$$\boxed{A \in \mathcal{N}_n \implies A^* \in \mathbb{C}[A]}$$

b) Si A et B sont dans $\mathcal{N}_n$, il existe des polynômes P et Q tels que $A^* = P(A)$ et $B^* = Q(B)$.

Comme A et B commutent des raisonnements par récurrence simples montrent que toute puissance de A commute avec toute puissance de B et$P(A)$ commute avec $Q(B)$.