X 2008-MP
1re épreuve

Durée : 4 heures

Equations difféentielles de Sturm-Liouville

Ce problème est consacré à l'étude d'une équation différentielle avec paramètre. On désigne par $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ l'espace des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

Première Partie

Dans cette première partie, étant donné deux fonctions p et q de $\mathcal{C}^\infty([0,1])$, on désigne par $A_{p,q}$ l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ défini par :

$$A_{p,q}(y) = y'' + py' + qy$$

et par $(D_{p,q})$ l'équation différentielle sur $[0,1]$: $A_{p,q}(y) = 0$.

1°) Soit y une solution non identiquement nulle de $(D_{p,q})$.

a) Montrer que les fonctions y et y' ne s'annulent pas simultanément.

b) Montrer que les zéros de y sont en nombre fini.

2°) Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $(D_{p,q})$; on suppose que y_1 admet au moins deux zéros et on note a et b deux zéros consécutifs.

a) Montrer que y_2 admet au moins un zéro dans l'intervalle ouvert $]a,b[$. (On pourra procéder par l'absurde et considérer le wronskien W de y_1 et y_2.)

b) La fonction y_2 peut-elle avoir plusieurs zéros dans $]a,b[$?

Etant donné deux fonctions u et v de $\mathcal{C}^\infty([0,1])$, u ne s'annulant en aucun point, on désigne par $B_{u,v}$ l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ défini par :

$$B_{u,v}(y) = (uy')' + vy$$

et par $(E_{u,v})$ l'équation différentielle sur $[0,1]$: $B_{u,v}(y) = 0$.

3°) a) Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $(D_{p,q})$ et soit W leur wronskien. Vérifier la relation :

$$y_1 B_{u,v}(y_2) - y_2 B_{u,v}(y_1) = (u' - up)W$$

b) Montrer que, pour tout couple (p,q), il existe des couples (u,v) tels que $\operatorname{Ker} A_{p,q} = \operatorname{Ker} B_{u,v}$ et déterminer tous ces couples (u,v).

4°) On se donne trois fonctions u, v_1, v_2 de $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ et on suppose :

$$u(x) > 0, v_2(x) < v_1(x) \text{ pour tout } x \in [0,1]$$

Pour $i = 1,2$, on note y_i une solution non identiquement nulle de l'équation (E_{u,v_i}) ; on suppose que y_2 admet au moins deux zéros et on note a et b deux zéros consécutifs.

a) Vérifier la relation : $\left[uy_1y_2'\right]_a^b = \displaystyle\int_a^b (v_1(x) - v_2(x)y_1(x)y_2(x)\,dx$

(on pourra considérer $\displaystyle\int_a^b (y_1 B_{u,v_2}(y_2) - y_2 B_{u,v_1}(y_1))\,dx$).

b) Montrer que y_1 admet au moins un zéro dans l'intervalle $]a,b[$ (on pourra procéder par l'absurde).

Dans toute la suite du problème, on note r une fonction de $\mathcal{C}^\infty([0,1])$; pour tout nombre réel λ on considère l'équation différentielle sur $[0,1]$:

$$y'' - (\lambda - r)y = 0 \qquad (D_\lambda)$$

On note y_λ l'unique solution de (D_λ) satisfaisant $y_\lambda(0) = 0$, $y'_\lambda(0) = 1$, et E_λ l'espace vectoriel (éventuellement réduit à zéro) des solutions de (D_λ) satisfaisant $y(0) = y(1) = 0$; si cet espace n'est pas réduit à zéro, on dit que λ est valeur propre.

Deuxième partie

5°) a) Quelles sont les valeurs possibles de $\dim E_\lambda$?

b) Démontrer l'équivalence des conditions $E_\lambda \neq \{0\}$ et $y_\lambda(1) = 0$.

6°) Démontrer les assertions suivantes :

a) Toute valeur propre est supérieure ou égale à $\inf_{x\in[0,1]} r(x)$.

b) Si $y_1 \in E_{\lambda_1}$, $y_2 \in E_{\lambda_2}$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $\displaystyle\int_0^1 y_1(x)y_2(x)\,dx = 0$.

Troisième partie

Dans les troisième et quatrième parties, on désigne par $N(\lambda)$ le nombre des zéros de la fonction y_λ dans $[0,1]$ et on se propose d'étudier $N(\lambda)$ en lien avec les valeurs de $y_\lambda(1)$, ainsi que la répartition des valeurs propres.

7°) Dans cette question on examine le cas où $r = 0$ et $\lambda > 0$. On désigne par $E(a)$ la partie entière d'un nombre réel a.

a) Calculer $y_\lambda(x)$ pour $x \in [0,1]$.

b) Calculer $N(\lambda)$.

c) Préciser le comportement de $N(\lambda)$ au voisinage d'un point λ_0.

On ne suppose plus $r = 0$ ni $\lambda > 0$. On admettra que la fonction de deux variables $(\lambda, x) \mapsto y_\lambda(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

8°) Dans cette question, on se propose de démontrer que, si $y_{\lambda_0}(1)$ est non nul, $N(\lambda)$ est constant dans un voisinage de λ_0.

On désigne par $c_1, \ldots, c_n, n \geqslant 1$ les zéros de y_{λ_0} dans $[0,1]$, avec

$$0 = c_1 < c_1 < \cdots < c_n < 1$$

a) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(\xi_j)_{0\leq j\leq 2n}$ de nombres réels, possédant les propriétés suivantes :

(i) $\xi_0 = 0, \xi_{2n} = 1, 0 < \xi_1 < \xi_2, \xi_{2j-2} < c_j < \xi_{2j-1}$ pour $j = 2, \ldots, n$;

(ii) $(-1)^{j+1} y_{\lambda_0} > 0$ sur $[\xi_{2j-1}, \xi_{2j}]$, $j = 1, \ldots, n$;

(iii) $(-1)^j y'_{\lambda_0} > 0$ sur $[\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$, $j = 0, \ldots, n-1$.

b) Dans cette question, on considère une fonction F de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un ouvert contenant un rectangle compact $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$.
Démontrer l'assertion suivante :
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que les conditions $s_1, s_2 \in I$ et $|s_1 - s_2| < \delta$ impliquent $|F(s_1,t) - F(s_2,t)| < \varepsilon$ pour tout $t \in J$.

c) Montrer que, pour tout λ suffisamment voisin de λ_0, y_λ a exactement un zéro dans chacun des intervalles $[\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$, mais n'en a aucun dans les intervalles $[\xi_{2j-1}, \xi_{2j}]$. Conclure.

9°) Montrer que, pour tout $\lambda \geqslant \rho = \sup_{x\in[0,1]} r(x)$, on a :

$$N(\lambda) \geqslant E((\lambda-\rho)^{1/2}\pi^{-1})$$

(on pourra utiliser la question **4°)** et la question **7°)** en y remplaçant λ par un réel quelconque $\mu < \lambda - \rho$.)

10°) a) Montrer que si $y_\lambda(1)$ est non nul pour tout λ appartenant à un intervalle I, $N(\lambda)$ est constant dans I.

b) L'ensemble des valeurs propres est-il vide ou non vide ? fini ou infini ?

Quatrième partie

Dans cette quatrième partie, on étudie le comportement de $N(\lambda)$ au voisinage d'un point λ_0 tel que $y_{\lambda_0}(1) = 0$. On écrira $y(\lambda, x)$ au lieu de $y_\lambda(x)$, et on rappelle que cette fonction de deux variables est de classe $\mathcal{C}^\infty$; l'équation (D_λ) s'écrit donc :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (\lambda - r)y = 0 \qquad (i)$$

11°) démontrer que la relation (i) entraîne les relations suivantes :

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial\lambda} + (\lambda - r)\frac{\partial y}{\partial\lambda} + y = 0 \qquad (ii)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial^3 y}{\partial x^2\partial\lambda}y - y^2 = 0 \qquad (iii)$$

$$\frac{\partial y}{\partial\lambda}(\lambda_0, 1)\frac{\partial y}{\partial x}(\lambda_0, 1) = \int_0^1 y(\lambda_0, x)^2\,dx > 0 \qquad (iv)$$

12°) Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ ayant les propriétés suivantes :

(i) si $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0[$, on a $N(\lambda) = N(\lambda_0) - 1$;

(ii) si $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon]$, on a $N(\lambda) = N(\lambda_0)$.

13°) Montrer qu'on peut écrire les valeurs propres comme une suite croissante infinie $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, et exprimer $N(\lambda_n)$ en fonction de n.

Solution

Première partie

Question 1.

a) $(D_{p,q})$ est une équation différentielle linéaire du second ordre.

Soit $x_0 \in [0,1]$, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure qu'il existe une seule solution y de cette équation différentielle telle que $y(x_0) = y'(x_0) = 0$.
La fonction nulle convenant banalement, on en déduit par contraposée que si y est une solution non nulle, alors on n'a pas $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, et ceci quel que soit le choix de x_0.

b) Supposons que y admette une infinité de zéros sur le compact $[0,1]$. Alors l'ensemble des zéros admet un « point d'accumulation » $\ell \in [0,1]$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de zéros de y qui converge vers ℓ et telle que, pour tout n, $x_n \neq \ell$.
Par continuité de y, on a $y(\ell) = 0$.
Comme $y(x_n) = y(\ell) = 0$, le théorème de Rolle montre qu'il existe $x'_n \in]x_n, \ell[$ tel que $y'(x'_n) = 0$.
Par encadrement, la suite (x'_n) converge vers ℓ et par continuité de y', on a $y'(\ell) = 0$.
Comme y n'est pas la solution nulle, ceci contredit le résultat **a)**, et donne le résultat demandé :

$$\boxed{\text{seule la solution nulle s'annule une infinité de fois}}$$

Question 2.

[Remarquons que l'on ne devrait pas dire « W est le wronskien de y_1 et y_2 », mais plutôt « W est le wronskien de (y_1, y_2) », car l'ordre a une importance au niveau du signe ...]

a) Soit $W = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$. La fonction W est dérivable sur $[0,1]$ et :

$$W' = y_1 y''_2 - y''_1 y_2 = y_1(-py'_2 - qy_2) + (py'_1 + qy_1)y_2 = -pW$$

Ainsi, W est de la forme $x \mapsto k\exp(-P(x))$, où P est une primitive de p.

Comme (y_1, y_2) est une famille libre, le wronskien n'est pas la fonction nulle, donc en fait n'est jamais nul et en particulier il est de signe fixe. Or $W(a) = -y'_1(a)y_2(a)$ et $W(b) = -y'_1(b)y_2(b)$.

Mais y_1 est de signe fixe sur $]a, b[$ (a et b sont des zéros **consécutifs**) et quitte à changer y_1 en $-y_1$, on peut supposer $y_1(x) > 0$ sur $]a, b[$ et alors on a $y'_1(a) \geqslant 0$, $y'_2(b) \leqslant 0$, donc $y'_1(a) > 0$ et $y'_1(b) < 0$ (la valeur 0 est interdite).

Par conséquent $y_2(a)$ et $y_2(b)$ sont de signes contraires et par le théorème des valeurs intermédiaires, version passage de la douane, y_2 s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.

b) Si y_2 avait plusieurs zéros sur $]a, b[$, soit α, β deux zéros consécutifs de y_2. En échangeant les rôles de y_1 et y_2, y_2 s'annulerait au moins une fois sur $]\alpha, \beta[$, donc sur $]a, b[$, ce qui contredit la définition de a et b.
Donc y_2 a un seul zéro sur $]a, b[$ (résultat connu sous le nom de « lemme d'entrelacement de Sturm »).

Question 3.

a) On a $B_{u,v}(y) = (uy')' + vy$, donc :

$$\begin{aligned} y_1B_{u,v}(y_2) - y_2B_{u,v}(y_1) &= y_1(uy_2')' - y_2(uy_1')' \\ &= y_1(uy_2'' + u'y_2') - y_2(uy_1'' + u'y_1') \\ &= u(y_1y_2'' - y_2y_1'') + u'(y_1y_2' - y_2y_1') \\ &= (u' - up)(y_1y_2' - y_2y_1') \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{y_1B_{u,v}(y_2) - y_2B_{u,v}(y_1) = (u' - up)W}$$

b) On a :

$\operatorname{Ker} A_{p,q} = \{y \ / \ y'' + py' + qy = 0\}$

$\operatorname{Ker} B_{u,v} = \{y \ / \ uy'' + u'y' + vy = 0\} = \{y \ / \ y'' + \dfrac{u'}{u}y' + \dfrac{v}{u}y = 0\}$

A la lecture de ces définitions, on sent bien que l'égalité des noyaux doit se traduire par $p = \dfrac{u'}{u}$ et $q = \dfrac{v}{u}$; ...

$\star$ Supposons $\operatorname{Ker} A_{p,q} = \operatorname{Ker} B_{u,v}$ et soit (y_1, y_2) un système fondamental de solutions de $D_{p,q}$. On a $A_{p,q}(y_1) = A_{p,q}(y_2)$ et donc $B_{u,v}(y_1) = B_{u,v}(y_2) = 0$. Ainsi, le calcul précédent montre que $(u' - pu)W = 0$.

Comme W n'est jamais nul, on a déjà $u' = pu$.

$\star$ Ainsi : $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$ et $y_1'' + \dfrac{u'}{u}y_1' + \dfrac{v}{u}y_1 = y_1'' + py_1' + \dfrac{v}{u}y_1 = 0$.

Par différence, on a : $(q - \dfrac{v}{u})y_1 = 0$ et comme y_1 n'est pas la solution nulle elle ne s'annule qu'en un nombre fini de points (question **1°) b)**), par conséquent $q - \dfrac{v}{u}$ s'annule sur $[0, 1]$ sauf en un nombre fini de points, donc s'annule partout par continuité..

Ainsi : $\operatorname{Ker} A_{p,q} = \operatorname{Ker} B_{u,v} \implies u' = pu$ et $v = qu$.

La réciproque est triviale et l'équation différentielle $u' = pu$ s'intégrant sans peine, on obtient :

$$\boxed{u(x) = K \exp\Big(\int_0^x p(t)\,dt\Big) \text{ et } v(x) = q(x)u(x),\ K \in \mathbb{R}}$$

Question 4.

a) *[$[f]_a^b$ est une notation standard ? On comprend que cela vaut $f(b) - f(a)$ ...]*

Partons de $I = \displaystyle\int_a^b (y_1B_{u,v_2}(y_2) - y_2B_{u,v_1}(y_1))$.

(Sans le « dx », ou alors il faut mettre des x dans toutes les fonctions : le concepteur n'est pas très à cheval sur les notations !)

Tout d'abord $I = 0$, car la fonction à intégrer est la fonction nulle, et en explicitant :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b (y_1(uy_2'' + u'y_2' + v_2y_2) - y_2(uy_1'' + u'y_1' + v_1y_1)) \\ &= \int_a^b (v_2 - v_1)y_1y_2 + \int_a^b (u(y_1y_2'' - y_2y_1'') + u'(y_1y_2' - y_2y_1')) \end{aligned}$$

Mais : $\begin{cases} (uy_1y_2')' = u'y_1y_2' + uy_1'y_2' + uy_1y_2'' \\ (uy_1'y_2)' = u'y_1'y_2 + uy_1'y_2' + uy_1''y_2 \end{cases}$ et, par différence :

$$(uy_1y_2' - uy_1'y_2)' = u(y_1y_2' - y_2y_1') + u(y_1y_2'' - y_2y_1'')$$

La chance étant avec nous, on peut achever le calcul et :

$$0 = \int_a^b (v_2 - v_1)y_1y_2 + \big[uy_1y_2' - uy_1'y_2\big]_a^b$$

C'est vraiment notre jour de chance, car $y_2(a) = y_2(b) = 0$ et il reste donc :

$$\boxed{\int_a^b (v_1 - v_2)y_1y_2 = \big[uy_1y_2'\big]_a^b}$$

b) Supposons que y_1 n'ait aucun zéro dans $]a, b[$, alors cette fonction a un signe fixe (strictement) sur $]a, b[$ et quitte à changer y_1 et/ou y_2 en leur opposé (ce qui ne change rien à la formule obtenue en **a)**, on peut supposer y_1 et y_2 strictement positives sur $]a, b[$ (pour y_2 cela résulte du fait que a et b sont des zéros consécutifs de y_2)

$\to$ Comme $v_1 - v_2$ est continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $\displaystyle\int_a^b (v_1 - v_2)y_1y_2 > 0$

$\to$ Le raisonnement fait en **2°) a)** (en remplaçant y_1 par y_2 montre que $y_2'(a) > 0$ et $y_2'(b) < 0$, et comme y_1 est strictement positive sur $]a, b[$, on a $y_1(a) \geqslant 0$ et $y_1(b) \geqslant 0$.

Donc $u(b)y_1(b)y_2'(b) \leqslant 0$ et $u(a)y_1(a)y_2'(a) \geqslant 0$, d'où $\big[uy_1y_2'\big]_a^b \leqslant 0$.

Ces deux résultats sont incompatibles avec le résultat obtenu en **a)** et notre hypothèse est donc absurde et y_1 admet au moins un zéro dans l'intervalle $]a, b[$.

[Ceci est la clé de cette épreuve, à suivre . . .]

Deuxième partie

Question 5.

a) L'ensemble des solutions de (D_λ) est un espace vectoriel de dimension 2, l'ensemble des solutions telles que $y(0) = 0$ est un espace vectoriel de dimension 1 (c'est la droite engendrée par y_λ) et on n'est pas sûr qu'une solution telle que $y(0) = 0$ puisse réaliser $y(1) = 0$, donc :

$$\boxed{\dim E_\lambda \in \{0, 1\}}$$

[Au fait, il est clair que E_λ est un espace vectoriel.]

b) $\star$ Si y_λ vérifie $y_\lambda(1) = 0$, comme $y_\lambda(0) = 0$ et $y_\lambda'(0) = 1$, cela prouve que $y_\lambda \in E_\lambda$ et que y_λ n'est pas la fonction nulle, ainsi :

$$y_\lambda(1) = 0 \implies E_\lambda \neq \{0\}$$

$\star$ Supposons $E_\lambda \neq \{0\}$, soit $y \in E_\lambda \setminus \{0\}$. On a $y(0) = y(1) = 0$ et $y'(0) \neq 0$. Alors $z = \dfrac{1}{y'(0)}y$ vérifie $z(0) = 0$, $z'(0) = 1$, donc $z = y_\lambda$ et $z(1) = y_\lambda(1) = 0$.

$$\boxed{y_\lambda(1) = 0 \iff E_\lambda \neq \{0\}}$$

Question 6.

a) Supposons qu'il existe une valeur propre λ strictement inférieure à $\inf\limits_{[0,1]} r$. On a donc $\forall\, x \in [0,1], r(x) > \lambda$.
Soit alors y une solution de (D_λ) telle que $y(0) = y(1) = 0$ et différente de la fonction nulle. On a :

$\rightarrow \displaystyle\int_0^1 yy'' = \int_0^1 (r-\lambda)y^2 > 0$
(fonction à intégrer continue positive et non identiquement nulle)

$\rightarrow \displaystyle\int_0^1 yy'' = \left[yy'\right]_0^1 - \int_0^1 y'^2 = -\int_0^1 y'^2 \leqslant 0$
(intégration par parties et $y(0) = y(1) = 0$)

Il y a comme un malaise et notre hypothèse est absurde, donc :

$$\boxed{\lambda \text{ valeur propre } \Longrightarrow \lambda \geqslant \inf_{[0,1]} r}$$

b) Comme $y_1 \in E_{\lambda_1}$ et $y_2 \in E_{\lambda_2}$, on peut écrire :

$\star\ \lambda_1 \displaystyle\int_0^1 y_1 y_2 = \int_0^1 y_2(ry_1 - y_1'') = \int_0^1 ry_1y_2 - \int_0^1 y_2 y_1''$

et, en intégrant par parties :

$$\lambda_1 \int_0^1 y_1 y_2 = \int_0^1 ry_1y_2 - \left[y_2 y_1'\right]_0^1 + \int_0^1 y_1'y_2' = \int_0^1 ry_1y_2 + \int_0^1 y_1'y_2'$$

$\star$ Le même calcul donne en permutant les rôles de y_1 et y_2 :

$$\lambda_2 \int_0^1 y_1 y_2 = \int_0^1 ry_2y_1 + \int_0^1 y_2'y_1'$$

Donc $\lambda_1 \displaystyle\int_0^1 y_1y_2 = \lambda_2 \int_0^1 y_1 y_2$ et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\boxed{\int_0^1 y_1 y_2 = 0}$$

Troisième partie

Question 7.

a) La solution générale de l'équation différentielle $y'' + \lambda y = 0$, avec $\lambda > 0$ est :

$$y(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$y(0) = 0$ donne $A = 0$ et $y'(0) = 1$ donne alors $B\sqrt{\lambda} = 1$, donc :

$$\boxed{y_\lambda : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}x)}$$

b) $y_\lambda(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in [0,1]$ et $\sqrt{\lambda}x \in \pi\mathbb{Z}$

$\Longleftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{\sqrt{\lambda}}$ et $k \in \mathbb{Z}$, avec $0 \leqslant k\pi \leqslant \sqrt{\lambda}$

$\Longleftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{\sqrt{\lambda}}$ et $k \in \mathbb{Z}$, avec $0 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \dfrac{\sqrt{\lambda}}{\lambda} \right\rfloor$

Ainsi :

$$\boxed{N(\lambda) = 1 + \lfloor \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda} \rfloor}$$

c) La fonction $\lambda \mapsto N(\lambda)$ est en escalier, les marches se situant aux points d'abscisse $k^2\pi^2, k \in \mathbb{N}^*$, et ces marches sont de hauteur 1. Que dire de plus ?

Question 8.

a) Considérons le démarrage : $0 = c_1 < c_2$:
La fonction y_{λ_0} est nulle en c_1 et c_2, ne s'annule pas entre les deux et $y'_{\lambda_0}(c_1) > 0$. Comme elle ne peut pas changer de signe entre c_1 et c_2 (ce sont des zéros consécutifs) elle est strictement positive sur $]c_1, c_2[$.

La dérivée en c_2 est négative ou nulle (on descend vers 0) et comme elle ne peut être nulle, $y'_{\lambda_0}(c_2) < 0$.
La fonction y'_{λ_0} est continue, donc :

$$y'_{\lambda_0}(c_1) > 0 \implies \exists\, \xi_1 \in]c_1, c_2[, \forall\, x \in [c_1, \xi_1], y'_{\lambda_0}(x) > 0$$

et

$$y'_{\lambda_0}(c_2) < 0 \implies \exists\, \xi_2 \in]\xi_1, c_2[, \forall\, x \in [\xi_1, c_2], y'_{\lambda_0}(x) < 0$$

On peut résumer ceci dans le tableau :

x	c_1	ξ_1	ξ_2	c_2
$y'_{\lambda_0}(x)$	$+$		$-$	
y_{λ_0}	0	$+$		0

On passe alors au segment $[c_2, c_3]$. Comme $y'_{\lambda_0}(c_2) < 0$ et comme y_{λ_0} ne peut pas changer de signe entre c_2 et c_3, on se retrouve dans la même situation qu'entre c_1 et c_2, mais pour la fonction $-y_{\lambda_0}$. Il existe donc ξ_3 et ξ_4, avec $c_2 < \xi_3 < \xi_4 < c_3$ tels que y'_{λ_0} soit à valeurs strictement négatives sur $[c_2, \xi_3]$, à valeurs strictement positives sur $[\xi_4, c_3]$ et que y_{λ_0} soit à valeurs strictement négatives sur $[\xi_3, \xi_4]$.

On peut alors mettre les deux résumés bout à bout et oublier l'intermédiaire c_2 :

x	c_1	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	c_3
$y'_{\lambda_0}(x)$	$+$		$-$		$+$	
y_{λ_0}		$+$		$-$		

Il n'y a plus qu'à continuer cette alternance de segments où la dérivée est de signe (strict) fixe et de segments ou la fonction est de signe (strict) fixe.

On achève avec l'étude sur $[c_n, 1]$, où l'on peut définir de la même façon ξ_{2n-1}, la dérivée ayant un signe strict fixe sur $[c_n, \xi_{2n-1}]$ (donc en fait sur $[\xi_{2n-2}, \xi_{2n-1}]$) et la fonction ayant un signe strict fixe sur $[\xi_{2n-1}, \xi_{2n}]$ (celui de $y_{\lambda_0}(1)$ qui est non nul), en posant bien sûr $\xi_{2n} = 1$.

b) Pas besoin d'aller chercher une majoration de dérivées partielles. Il suffit de supposer F continue sur le pavé compact $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$, en effet F est alors uniformément continue (théorème de H.Heine) et :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \|(s_1, t_1) - (s_2, t_2)\|_\infty < \delta \implies |F(s_1, t_1) - F(s_2, t_2)| < \varepsilon$$