FONCTIONS

1	Ensemble de définition d'une fonction réelle	A / B / D	1re année
2	Limite(s) d'une fonction réelle	A / B / D	1re année
3	Dérivée d'une fonction	A / B / D	1re année
4	Bases de calcul intégral	A / B / D	1re année
5	Compléments sur LN et EXP	A / B / D	1re année (B-D) 2e année
6	Développements limités	B / D	1re année 2e année
Correction commentée des exercices			

1 Ensemble de définition d'une fonction réelle

Prérequis : fonctions affines, fonctions de degré 2

A savoir

Les fonctions réelles à valeurs réelles sont les fonctions dont les espaces de départ et d'arrivée sont $\mathbb{R}$.

L'**ensemble de définition** d'une telle fonction est la partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle le calcul des images est possible.

Au niveau actuel, 3 points sont à étudier :
- un inverse : $\frac{1}{u}$ n'est défini que pour $u \neq 0$
- une racine carrée : $\sqrt{u}$ n'est définie que pour $u \geq 0$
- un logarithme népérien : $\ln(u)$ n'est défini que pour $u > 0$

Pour s'exercer

Exercice 1.1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x+7} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{x^2} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+2}{3x-4} \quad ; \quad i(x) = \frac{3x^2+2}{(x+7)^2}$$

$$j(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x+1} \quad ; \quad k(x) = \frac{x^2+25x-11}{3x^2+2x-1} \quad ; \quad l(x) = \frac{17x-3}{x^2+1}$$

15 min

Exercice 1.2. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x+5} \qquad g(x) = \sqrt{(x+1)(x-2)}$$

$$h(x) = \sqrt{2x^2-4x+1} \qquad i(x) = \sqrt{5-3x^2+2x}$$

15 min

Exercice 1.3. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(x+2) \quad ; \quad g(x) = \ln(x^2-6x+9) \quad ; \quad h(x) = \ln(3x^2-4x+1)$$

10 min

Exercice 1.4. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x-2}\right) \quad ; \quad g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{3-x}} \quad ; \quad h(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$$

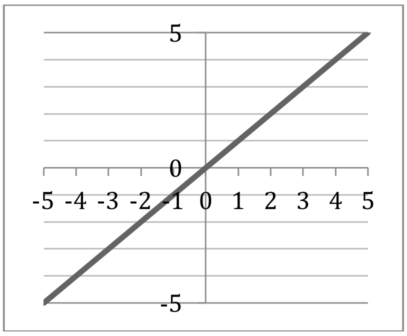
$$i(x) = \frac{\ln(x+4)}{x-5} \quad ; \quad j(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$$

20 min

Des fonctions classiques

Fonction **identité**

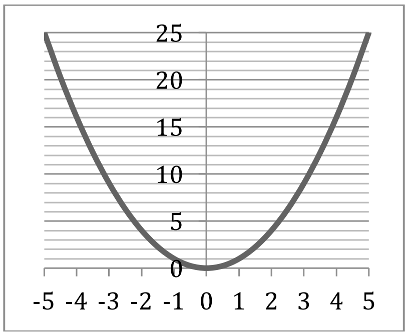
$$id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x$$



Impaire

Fonction **carré**

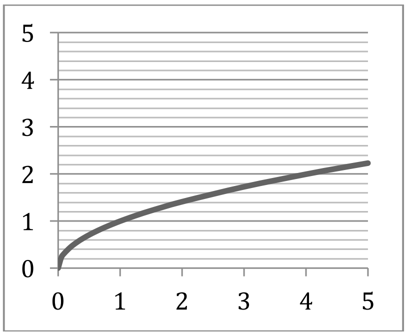
$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$



Paire

Fonction **racine carrée**

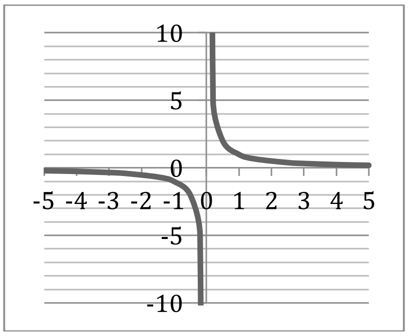
$$rac : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$



Aucune parité

Fonction **inverse**

$$inv : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$



Impaire

2 Limite(s) d'une fonction réelle

Prérequis : Ensemble de définition, limites des fonctions classiques

A savoir

On peut calculer les images d'une fonction sur son ensemble de définition. Mais que se passe-t-il en "bordure" (on dit « aux bornes ») de celui-ci ?

Si l'ensemble à une borne finie ou un "trou" :
On travaille par limite à gauche et/ou limite à droite (ce n'est que si les deux sont égales que la fonction à une limite en ce point).

Limite vers $\pm\infty$:
On reconstruit l'expression pas à pas ou par morceaux, grâce aux limites des fonctions classiques.

Formes indéterminées :
Les deux cas $(+\infty) + (-\infty)$ et $0 \times \infty$ $\left(\textit{qui s'écrit aussi } \frac{\infty}{\infty} \textit{ et } \frac{0}{0}\right)$ sont indécidables.
Pour « lever » la forme indéterminée, on travaille avec des techniques telles que :
- quand $x \to +\infty$, $e^x \gg x^{n+1} \gg x^n \gg \ln(x)$
- pour une fonction rationnelle, voir le quotient des termes de plus haut degré
- factoriser, développer ou utiliser l'expression conjuguée
- des limites classiques telles que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Pour s'exercer

Exercice 2.1. Calculer la limite à gauche et/ou à droite en a, dans les cas suivants.

$f(x) = \frac{1}{x+7}$, à gauche et à droite, $a = -7$ $\quad$ $g(x) = \frac{1}{x^2}$, à gauche et à droite, $a = 0$

$h(x) = \ln\left(\frac{1}{x-2}\right)$, à droite, $a = 2$ $\quad$ $i(x) = \ln(x^2 - x - 2)$, à gauche, $a = -2$

15 min

Exercice 2.2. Calculer la limite en $+\infty$ des fonctions définies par :

$f(x) = \sqrt{x+5}$ $\quad$ $g(x) = (x+1)(2-x)$

$h(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 5}$ $\quad$ $i(x) = \ln\left(\frac{7}{2x-3}\right)$

15 min

Exercice 2.3. *(Sujet Groupement B)* Soit $f(x) = (1 - 5x)e^{-2x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} -5xe^{-2x} = 0$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. La courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote en $+\infty$ dont une équation est : $y = 1 - 5x$, $y = 0$ ou $x = 0$?

5 min

Exercice 2.4.

1. Calculer la limite en 1 de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$$

2. Calculer la limite en 0 de la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$$

20 min

Point info

Rechercher une asymptote (comme à l'exercice 2.3) ?

Au niveau actuel, une recherche d'asymptote revient à une simple relecture "géométrique" d'une limite.

- *Une écriture du style :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

indique, en vulgarisant, que «plus x "avance", plus f(x) s'approche de la valeur a ». Cela se traduit par une asymptote horizontale "à la hauteur a", c'est-à-dire d'équation $(y = a)$.
Une étude de signe permet de savoir si la courbe s'approche par "au-dessus", par "en dessous", etc.

- *Une écriture du style :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \ (ou - \infty)$$

indique, en vulgarisant, que «plus x "s'approche de" a, plus f(x) prend des valeurs grandes (ou petites) ». Cela se traduit par une asymptote verticale en a, c'est-à-dire d'équation $(x = a)$.

- *Les asymptotes obliques sont déterminées par des écritures du type*

$$f(x) = ax + b + \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$$

$(y = ax + b)$ est une équation de l'asymptote.
Ces écritures sont obtenues, par exemple, en utilisant un développement limité.

3 Dérivée d'une fonction

Prérequis : équation de droite, fonctions composées, limites

A savoir

Le **nombre dérivée** en a de la fonction f, noté $f'(a)$, est le **coefficient directeur** de la tangente à Cf en $A(a, f(a))$.

Une tangente est la position limite d'une sécante : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Ce nombre n'existe pas toujours et, lorsque c'est le cas, on dit que la fonction est **dérivable en a**. Comme pour les limites, on peut être dérivable à droite et/ou à gauche avec des valeurs différentes.

Si la fonction est dérivable en tout point d'un intervalle I, on peut définir la **fonction dérivée** f' sur I. Il existe alors des formules de calcul.

Dérivées classiques : **si** $f(x) = x^n$ **alors** $f'(x) = n.x^{n-1}$

n	$f(x)$	$f'(x)$
0	cte	0
1	x	1
2	x^2	$2x$
-1	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Formules algébriques : $(u + v)' = u' + v'$; $(\lambda.u)' = \lambda.u', \lambda \in \mathbb{R}$

$$(u.v)' = u'v + uv' \; ; \; \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Fonction composée : dans le cas $x \mapsto f[u(x)]$, on dérive f et on multiplie le résultat par $u'(x)$.

$$(f[u(x)])' = f'[u(x)] \times u'(x)$$

Point info

Le signe de la dérivée f' permet de connaître les variations de f.

Lorsque f' est positive, f est croissante. Lorsque f' est négative, f est décroissante. Si f' est nulle, f est constante.

L'étude est classiquement rédigée dans un « tableau de variations ».

Pour s'exercer

Exercice 3.1. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes.

$$f(x) = x^7 \quad ; \quad g(x) = 5x^7 \quad ; \quad h(x) = 5x^2 + 2x - 7 \quad ; \quad i(x) = x\sqrt{x}$$

$$j(x) = 1/x^2 \quad ; \quad k(x) = 7/x^2 \quad ; \quad l(x) = x^3 - \frac{1}{x} + 5\sqrt{x} \quad ; \quad m(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x}$$

20 min

Exercice 3.2. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes.

$$f(x) = (2x+1)^2 \quad ; \quad g(x) = \sqrt{3x+5} \quad ; \quad h(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 5}$$

$$i(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad ; \quad j(x) = \frac{2x^2-1}{3x-7} \quad ; \quad k(x) = (2-x).\sqrt{x+1}$$

30 min

Exercice 3.3. Dresser le tableau de variation des fonctions g, h, j et k de l'exercice 3.2.

35 min

Exercice 3.4. Soit la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 \; pour \; x < 0 \\ f(x) = x^2 + 1 \; sinon \end{cases}$$

La fonction est-elle définie en 0 ? Si oui, étudier la dérivabilité en 0.

10 min

Exercice 3.5. Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 7$.
f est dérivable en 0.

Trouver une équation de la tangente à Cf pour $x = 0$.

5 min

Point info

Il faut être très vigilant pour la rédaction des réponses.

Les enchaînements du genre « $f(x) = x^2 = 2x$ » sont totalement faux mathématiquement, même si on peut en comprendre l'idée.

L'utilisation de la notation $f'(x)$ permet d'écourter les réponses.

Il ne faut pas non plus mélanger la notation fonctionnelle f' et celle de l'image $f'(x)$, en particulier dans les formules.
Par exemple, on écrira « $u'.v' = u'v + uv'$ »
ou «$u'(x).v'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ ».

4	Bases de calcul intégral

4 Bases de calcul intégral

Prérequis : équation de droites, fonctions composées, dérivées

A savoir

On appelle **primitive** F de la fonction f toute fonction telle que $F' = f$.
Une primitive de f est calculée à une constante k près. Si $k = 0$, on parle de « **primitive principale** ».

Primitives principales classiques : **si** $f(x) = x^n$ **alors** $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

n	$f(x)$	$F(x)$
0	cte	cte $\times\, x$
1	x	$\frac{x^2}{2}$
2	x^2	$\frac{x^3}{3}$
-2	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
-3	$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{1}{2x^2}$

Fonction ln : pour $x > 0$, une primitive de la fonction inverse ($x \mapsto 1/x$) est le logarithme népérien (ln).
Sur $\mathbb{R}^*$, une primitive est $x \mapsto \ln(|x|)$

Fonctions composées : pour pouvoir calculer la primitive d'une fonction composée $f[u]$, il faut isoler u'.
Lorsqu'un produit est à intégrer, il peut simplement s'agir d'une telle fonction.

On appelle **intégrale** de f sur $[a; b]$, notée $\int_a^b f(x)dx$, le nombre $F(b) - F(a)$, noté aussi $[F(x)]_a^b$.

Formules de calcul :
- linéarité : $\int_a^b (u + v) = \int_a^b u + \int_a^b v$ et avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \lambda.u = \lambda.\int_a^b u$
- Chasles : avec $c \in [a; b]$, $\int_a^b u = \int_a^c u + \int_c^b u$
- inversion des bornes : $\int_a^b u = -\int_b^a u$
- intégration par parties : $\int_a^b u'.v = [u.v]_a^b - \int_a^b u.v'$

L'intégrale d'une fonction **positive** permet de calculer **l'aire sous la courbe** représentative d'une fonction.